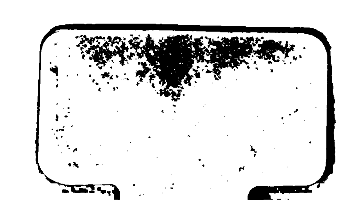


Allg. Encykl. der
Physik
Karsten



Cloth

D

ALLGEMEINE

ENCYKLOPÄDIE DER PHYSIK.

BEARBEITET

VON

P. W. BRIX IN BERLIN, B. W. FEDDERSEN IN LEIPZIG, F. C. O. VON FEILITZSCH IN GREIFSWALD, F. GRASHOF IN CARLSRUHE, F. HARMS IN BERLIN, H. HELMHOLTZ IN HEIDELBERG, G. KARSTEN IN KIEL, H. KARSTEN IN ROSTOCK, C. KUHN IN MÜNCHEN, J. LAMONT IN MÜNCHEN, E. E. SCHMID IN JENA, L. SEIDEL IN MÜNCHEN, A. STEINHEIL IN MÜNCHEN, E. VOIT IN MÜNCHEN, G. WEYER IN KIEL.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAV KARSTEN.

ZWANZIGSTE LIEFERUNG.

Enthaltend:

I. Band. ~~Einleitung in die Physik, von G. Karsten, F. Harms und G. Weyer. Bogen 44—Schluss nebst Titel und Register.~~

Grashof. Angewandte Mechanik

Bl. 1-18

LEIPZIG,
LEOPOLD VOSS.
1869.

PROSPECT.

Die grosse Ausdehnung, welche die physikalischen Wissenschaften erlangt haben und das stets fortschreitende Wachsthum derselben, haben zwei Klassen von Werken hervorgerufen, welche auf der Grundlage der allgemeinen Schriften (der Lehrbücher und Wörterbücher) fussend, die neu hinzugetretenen Kenntnisse aufzunehmen und zu ordnen bestimmt sind: Die Repertorien und die Jahresberichte.

Sowohl an Hand- und Wörterbüchern, als an Repertorien und Jahresberichten enthält die deutsche Literatur einen Reichthum gediegener Werke. Doch liegt es in der Natur jeder Art derselben, dass sie neben gewissen Vorzügen unvermeidliche Mängel zeigen.

Die Handbücher, zur ersten allgemeinen Orientirung bestimmt, können für den Physiker von Fach so wenig ausreichen, wie für den Liebhaber der Wissenschaft, der einen einzelnen Theil derselben vorzugsweise zum Studium macht, da ein beschränkter Umfang bei derartigen Werken geboten ist.

Helfen diesem Mangel die Wörterbücher ab, so haben sie dagegen den entschiedenen Nachtheil, dass man Zusammengehöriges in verschiedenen Artikeln suchen muss, und dass bei der Bearbeitung durch eine Gesellschaft von Gelehrten, wie sie erforderlich ist, eine grosse Zeit zur Vollendung des Werkes gehört, wodurch Nachträge und Verbesserungen veranlasst werden, die wiederum den Gebrauch des Werkes erschweren.

Der Zweck der Repertorien ist es, die ersteren Werke zu ergänzen, die Hand- und Wörterbücher auf den Standpunkt der neuesten Zeit zu führen; dasselbe gilt für die Jahresberichte, wenn man diese auch zugleich als die Vorbereitungen zu den Repertorien ansehen kann, da sie mehr die Aufgabe haben, das vorhandene Material eines Jahres zu sammeln, als es kritisch und systematisch zu verarbeiten. Bei dieser Klasse von Werken wird also von einer vollständigen Entwickelung der physikalischen Lehren abgesehen werden müssen.

Mit der Encyklopädie der Physik soll nun der Versuch gemacht werden, die Vorzüge der genannten verschiedenen Werke zu vereinigen; in derselben soll ein systematisches Werk gegeben werden, wie wir es in einem Handbuche besitzen, dieselbe soll die Vollständigkeit darbieten, wie ein Wörterbuch vom ausgedehntesten Umfange, und sie soll auch jeden Theil der Physik bis auf den Standpunkt des gegenwärtigen Augenblickes fortführen.

Die äussere Einrichtung, welche geeignet scheint, die genannten Vortheile zu erzielen, und welche demnach diejenige der Encyklopädie sein wird, lässt sich am kürzesten als ein Aneinanderreihen von Handbüchern über die einzelnen physikalischen Disciplinen in der Weise, dass durch sie das ganze Gebiet der Wissenschaft ausgefüllt wird, bezeichnen. Doch sollen jene einzelnen Handbücher nicht lose neben einander stehen, sondern in der Bearbeitung nach einem gemeinsamen Plane ihren Verband erhalten und als Ganzes ein System der Physik bilden.

Zunächst sind 21 solcher Handbücher oder Bände beabsichtigt, welche also als Kapitel des befolgten physikalischen Systems zu betrachten sind, nämlich:

1) Einleitung in die Physik (Literatur, speculative Physik, Maass und Messen, allgemeine Physik); 2) Krystallographie; 3) Allgemeine Kräftelehre; 4) Stoffanziehung in die Ferne und in die Nähe; 5) Angewandte Mechanik; 6) Wellenlehre und Akustik; 7) und 8) Reine Optik; 9) Physiologische Optik; 10) Chemische Wirkung des Lichtes; 11) Angewandte Optik; 12) Wirkungen der Wärme; 13) Theorie der Wärme; 14) Angewandte Wärmelehre; 15) Magnetismus; 16) Erdmagnetismus; 17) Reibungselektricität; 18) Galvanismus; 19) Elektromagnetismus, Induction; 20) Angewandte Electricitätslehre; 21) Meteorologie.

Kapitel I.

Elasticität und Festigkeit der Bau- und Maschinenmaterialien.

§. 1. Einleitung.

Elasticität nennt man bekanntlich die allen festen Körpern (von welchen hier einzig und allein die Rede ist) eigenthümliche innere Kraft, mit welcher sie der durch eine äussere Kraft verursachten gegenseitigen Verrückung ihrer kleinsten Theile und der dadurch bedingten Aenderung ihrer Form und ihres Volumens Widerstand leisten, und vermöge welcher sie auch ihre anfängliche Form und ihr anfängliches Volumen vollkommen oder unvollkommen wieder annehmen, wenn die Einwirkung jener äusseren Kraft aufhört. Man sagt, ein Körper verhalte sich oder sei bei einer gewissen Form- oder Volumenänderung vollkommen oder unvollkommen elastisch, je nachdem jene Aenderung vollkommen oder unvollkommen verschwindet. — Festigkeit nennt man die Kraft, mit welcher die festen Körper der Trennung ihrer Theile widerstehen.

Zahlreiche Erfahrungen haben zu dem Gesetze geführt, dass alle festen Körper bis zu einer gewissen Grenze der Belastung durch äussere Kräfte vollkommen elastisch sind. Diese Grenze der Belastung oder die durch sie hervorgerufene ihr gleiche und entgegenwirkende Elasticität nennen wir die Grenze der vollkommenen Elasticität oder schlechtweg die Elasticitätsgrenze eines Körpers; sie ist von dem Material und der Form des Körpers und von der Angriffsweise der ihn belastenden Kräfte abhängig. Bei allen Constructionen wird es als Grundregel angenommen, dass die Belastung keines Theils die Elasticitätsgrenze erreichen darf. Die Bestimmung der Formen (Dimensionen) und Belastungen der einzelnen Stücke, welche bei Bau- und Maschinenconstructionen hauptsächlich vorzukommen pflegen, jener Grundregel gemäss, macht den Gegenstand dieses Kapitels aus.

Anknüpfend an die thatsächliche Beschaffenheit der Hölzer, deren Elasticität und Festigkeit bei gewissen Formen der Stücke und bei gewissen Belastungsweisen derselben zu prüfen am frühesten ein Bedürfniss vorhanden war, denkt man sich auch andere Materialien, also namentlich auch Metalle, aus unendlich dünnen fadenförmigen Elementen oder Fasern bestehend, welche man indessen

lediglich als eine zur Erleichterung der Ausdrucksweise und zur Fixirung der Begriffe bei der Beschreibung und theoretischen Begründung der Elasticitätserscheinungen eingeführte, keineswegs aber als eine solche Vorstellung betrachten muss, welche der Sache nach durch diese Theorie nothwendig bedingt würde. Aus diesem Grunde kann man auch bei demselben Körper von Fasern reden, welche sich nach verschiedenen, sich kreuzenden Richtungen in demselben erstrecken, ja man kann in diesem Sinne bei Hölzern von Fasern sprechen, die gegen die natürlichen Holzfasern eine beliebige Richtung haben. Wie auch ein Körper geformt und belastet sein mag, so lassen sich die Wirkungen der Belastung auf denselben auf die Ausdehnungen oder Verkürzungen von Fasern zurückführen, die nach gewissen Richtungen im Körper verlaufen.

Unter der specifischen Ausdehnung oder Verkürzung einer Faser in einem Punkte A derselben verstehen wir die Grenze, welcher sich der Quotient aus der totalen Längenänderung eines den Punkt A enthaltenden Stückes der Faser dividirt durch dessen Länge mehr und mehr nähert, wenn jenes Faserstück kleiner und kleiner werdend und beständig den Punkt A enthaltend sich der Grenze Null nähert; oder, was auf eins hinauskommt, den Quotient aus der totalen Längenänderung eines den Punkt A enthaltenden unendlich kleinen Faserelementes dividirt durch dessen Länge; oder, was noch dasselbe ist, wir verstehen darunter die totale Ausdehnung oder Verkürzung, welche eine im natürlichen Zustande genommene Faser von der Länge $= 1$ erleiden würde, wenn sie ihrer ganzen Länge nach in denjenigen Zustand der Ausdehnung oder Verkürzung versetzt würde, welcher im Punkte A der betrachteten Faser stattfindet. Diese specifische Längenänderung soll stets mit dem Buchstaben λ bezeichnet werden. Wird von der specifischen Ausdehnung oder Verkürzung, oder auch schlechtweg von der Ausdehnung oder Verkürzung gesprochen, welche in einem Punkte A eines belasteten Körpers in einer gewissen Richtung AB stattfindet, so ist darunter die gleichnamige specifische Längenänderung einer in der Richtung AB sich erstreckenden Faser im Punkte A zu verstehen.

Unter der (totalen) Spannung einer ausgedehnten oder verkürzten Faser in einem Punkte A derselben versteht man diejenige Kraft, welche man, wenn die Faser isolirt und im Punkte A zerschnitten gedacht wird, in diesem Punkte in ihrer Richtung anbringen müsste, um sie trotz der Zerschneidung in ihrem vorherigen Zustande zu erhalten. Die einer Ausdehnung entsprechende nennt man absolute, die einer Verkürzung entsprechende hingegen rückwirkende Spannung. Der Quotient aus dieser totalen Spannung der Faser dividirt durch ihren unendlich kleinen Querschnitt bei A soll ihre specifische Spannung für diesen Punkt genannt und im Allgemeinen mit dem Buchstaben σ bezeichnet werden. Wenn in der Folge von der specifischen Spannung oder auch schlechtweg von der Spannung die Rede sein wird, welche in einem Punkte A eines belasteten Körpers in einer gewissen Richtung AB stattfindet, so ist darunter die specifische Spannung im Punkte A einer in der Richtung AB verlaufenden Faser zu verstehen.

Man muss annehmen, dass ein Körper aufhört, bei einer gewissen Belastung vollkommen elastisch zu sein, sobald die specifische Ausdehnung oder Verkür-

zung λ in irgend einem Punkte A in irgend einer Richtung AB eine gewisse Grenze λ' überschreitet, die im Allgemeinen sowohl für einen andern Punkt, als für eine andere Richtung eine andere sein kann. Sofern wir aber ein- für allemal einen homogenen Körper, d. h. einen solchen voraussetzen, der in jedem Punkte in irgend einer Richtung in jeder Beziehung und also auch hinsichtlich aller Elasticitätsverhältnisse sich ganz ebenso verhält, wie in irgend einem andern Punkte nach derselben Richtung, so ist es zur Erfüllung der vorangestellten Grundregel genügend, die Form und die Belastung eines Körpers so zu bestimmen, dass die specifische positive oder negative Ausdehnung in keinem Punkte und in keiner Richtung eine gewisse nur von dieser Richtung und dem Material abhängige Grenze λ' erreicht. Wenn ein Körper nicht nur in allen Punkten nach derselben Richtung hin, sondern auch in jedem einzelnen Punkte nach allen Richtungen hin in jeder Beziehung dasselbe Verhalten zeigt, d. h. wenn der Körper isotrop ist, wie man es in der Praxis von Metallen in der Regel, namentlich aber von gegossenen Metallen annehmen darf, so wird jener Grenzwerth λ' eine nur von dem Material abhängige Grösse.

Wäre die specifische Spannung σ in einem Punkte A in einer gewissen Richtung AB nur von der specifischen Längenänderung λ in diesem Punkte und in dieser Richtung abhängig, so dass also auch demselben Grenzwerth λ' der letzteren stets derselbe Grenzwerth σ' der ersteren entspräche, so würde man σ' mit Recht als Maass der vollkommenen Elasticität des betreffenden Materials in der betreffenden Richtung betrachten und die zu erfüllende Grundbedingung auch so ausdrücken können, dass man sagte, es dürfe die specifische Spannung in keinem Punkte und in keiner Richtung das entsprechende Maass der vollkommenen Elasticität erreichen. Weil aber erfahrungsmässig und theoretisch (§. 17) die obige Voraussetzung nur dann zutrifft, wenn die Spannung in der Richtung AB die einzige ist, welche im Punkte A stattfindet, so definiren wir, mit Vorwegnahme dieser Thatsache, das Maass der vollkommenen absoluten oder rückwirkenden Elasticität eines homogenen Materials in einer gewissen Richtung als diejenige specifische absolute oder rückwirkende Spannung σ', welche bei fehlender Seitenspannung der Grenze der vollkommenen Elasticität einer in der gedachten Richtung verlaufenden Faser entspricht. Ebenso nennen wir diejenige specifische absolute oder rückwirkende Spannung K, bei welcher eine in einer gewissen Richtung verlaufende Faser bei fehlender Seitenspannung zerstört (zerrissen oder zerdrückt) wird, das Maass der absoluten oder rückwirkenden Festigkeit des Materials in der gedachten Richtung. Diejenige specifische Spannung endlich, welche in einer gewissen Richtung bei fehlender Seitenspannung höchstens zugelassen werden soll, werden wir stets mit k bezeichnen. In den drei ersten Abschnitten, sowie in dem fünften dieses Kapitels betrachten wir nur solche besondere Fälle, wobei in jedem Punkte nur in einer und zwar stets in derselben Richtung eine Spannung stattfindet oder wenigstens nur in Betracht gezogen wird; hier reducirt sich deshalb die zu erfüllende Grundregel auf die Bedingung, dass die specifische Spannung in irgend einem Punkte des homogenen Körpers höchstens dem constanten Werthe k gleich sein soll

Da die höchstens zulässige specifische Spannung k stets kleiner ist, als das entsprechende Maass σ' der vollkommenen Elasticität, so muss man letzteres (vorausgesetzt, dass es durch Versuche ermittelt werden kann) mit einem gewissen echten Bruch, dem sogenannten Sicherheitscoefficienten, multipliciren, um erstere zu erhalten. Natürlich wird man diesen Coefficienten um so kleiner nehmen, eine je grössere Sicherheit und Dauerhaftigkeit der Construction verlangt wird. Ausserdem muss aber auch die Wahl jenes Coefficienten von dem bekannten Maasse der betreffenden Festigkeit, dessen Kenntniss ohnedem ganz überflüssig sein würde, abhängig gemacht werden. Wenn z. B. das Maass der vollkommenen absoluten Elasticität für Schmiedeeisen ungefähr $^1/_3$, für Gusseisen dagegen ungefähr $^3/_4$ vom Maasse der absoluten Festigkeit beträgt, so ist ein bis zur Elasticitätsgrenze ausgereckter gusseiserner Stab der gänzlichen Zerstörung bereits viel näher, als ein schmiedeeiserner Stab in gleichem Falle, weshalb es gerechtfertigt ist, den erwähnten Sicherheitscoefficienten in diesem Falle für Gusseisen kleiner anzunehmen, als für Schmiedeeisen. In vielen Fällen ist aber auch die Kenntniss des Maasses der vollkommenen Elasticität selbst so mangelhaft, dass nur die leichter zu prüfende Festigkeit den Constructionen zu Grunde gelegt werden kann; bei der Wahl des Sicherheitscoefficienten, der hier als Coefficient von K natürlich bedeutend kleiner genommen werden muss, als sonst als Coefficient von σ', ist es alsdann am zuverlässigsten, durch die Vergleichung mit analogen Fällen bei bewährten ausgeführten Constructionen sich bestimmen zu lassen.

Die bei den Constructionen am häufigsten vorkommende Körperform ist die prismatische und zwar mit vorwaltender Längen- oder Höhendimension. Ein solcher Körper soll gemeint sein, wenn in diesem Kapitel von einem Stabe, einem Balken oder einer Säule schlechtweg die Rede sein wird; und wenn wir schlechtweg von den Fasern eines solchen Körpers reden, so werden wir darunter stets diejenigen verstehen, welche mit der Axe parallel laufend gedacht werden können. Axe eines prismatischen Körpers nennt man aber den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Querschnitte oder überhaupt aller Durchschnitte desselben, von denen alle Seitenkanten getroffen werden, welcher geometrische Ort bekanntlich eine mit diesen Seitenkanten parallele gerade Linie ist. Ausgehend von der prismatischen Form unterscheiden wir rücksichtlich der Art und Weise, wie die äusseren Kräfte einwirken und wie die dadurch hervorgerufene Elasticität hauptsächlich sich äussert, die folgenden Fälle als besondere Abschnitte dieses Kapitels:

1. Absolute Elasticität und Festigkeit. Die Kräfte wirken in der Axe des Körpers (oder haben wenigstens eine in die Axe fallende Resultante) und streben ihn zu verlängern, respective zu zerreissen.

2. Einfache rückwirkende Elasticität und Festigkeit. Die Kräfte wirken in der Axe des Körpers und streben ihn zu verkürzen, respective zu zerdrücken.

3. Relative Elasticität und Festigkeit. Die Richtungslinien der Kräfte schneiden die Axe rechtwinkelig und streben den Körper zu biegen, respective zu brechen.

4. Schubelasticität und Festigkeit. Diese Aeusserungsweise der Elasticität und Festigkeit ist zwar nicht, wie die vorige und die beiden folgenden, vorzugsweise an die prismatische Körperform gebunden, sondern hat, ebenso wie die sub 1 und 2 aufgeführten, eine allgemeinere Bedeutung; wenn man jedoch auch hier von der prismatischen Form ausgehen will, so hat man darunter den Widerstand zu verstehen, den ein solcher Körper unter der Einwirkung von seine Axe rechtwinkelig schneidenden Kräften der gegenseitigen Verschiebung seiner Querschnitte, respective der Zerstörung in Folge solcher Verschiebung (der Abschiebung, Abdrückung eines Theils vom andern) entgegengesetzt.

5. Zusammengesetzte rückwirkende Elasticität und Festigkeit. Die Kräfte wirken in der Richtung der Axe des Körpers und streben ihn zu verkürzen und gleichzeitig zu biegen, respective zu zerknicken.

6. Torsionselasticität und Festigkeit. Die Kräfte wirken rechtwinkelig und windschief gegen die Axe des Körpers und streben ihn zu verdrehen, respective abzudrehen.

7. Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit. Der Körper ist mehreren jener besonderen Belastungsarten gleichzeitig unterworfen; oder allgemeiner, er befindet sich, während wir auch von seiner bisher vorausgesetzten prismatischen Form abstrahiren, unter der Einwirkung ganz beliebiger Kräfte.

§. 2. Elasticitätsgesetze. Elasticitätsmodulus.

Von den erwähnten verschiedenen Aeusserungsweisen der Elasticität eines belasteten Körpers lassen sich die relative und die zusammengesetzte rückwirkende Elasticität unmittelbar auf die absolute und einfache rückwirkende, d. h. auf die Ausdehnungen gewisser Fasern und die Verkürzungen gewisser anderer, zurückführen, wenigstens wenn man dabei gewisse in den meisten Fällen zulässige Vernachlässigungen sich erlaubt. Die Torsionselasticität lässt sich auf die in einem allgemeineren Sinne genommene Schubelasticität, die zusammengesetzte theils auf die absolute und einfache rückwirkende, theils auf die Schubelasticität zurückführen; sofern aber die letztere selbst wieder auf die Ausdehnungen und Verkürzungen gewisser Fasern zurückgeführt werden kann, so müssen mittelbar wenigstens die Gesetze der absoluten und der einfachen rückwirkenden Elasticität für alle Berechnungen in Betreff der Widerstandsfähigkeit der Körper die Grundlage bilden. Diese voranzuschickenden Gesetze sind die folgenden:

1. Die specifische Ausdehnung oder Verkürzung einer Faser hat bei fehlender Seitenspannung zu ihrer specifischen absoluten oder rückwirkenden Spannung ein constantes Verhältniss, so lange die letztere eine gewisse Grenze nicht überschreitet.

2. Die specifische Ausdehnung einer Faser, welche bei fehlender Seitenspannung einer gewissen specifischen absoluten Spannung derselben entspricht, ist bis zu einem gewissen Grenzwerthe der letzteren der einer ebenso grossen specifischen rückwirkenden Spannung entsprechenden specifischen Verkürzung gleich.

Abgesehen von praktischen Schwierigkeiten, würden diese beiden Fundamentalgesetze experimentell am unmittelbarsten bewiesen werden, indem man einen

prismatischen Stab, welcher an einem Ende befestigt ist, durch eine am andern Ende angebrachte und der Richtung nach in die Axe fallende, in dem einen oder andern Sinne wirkende Kraft mit der Vorsicht belastete, dass der Stab seine gerade prismatische Form genau beibehält und also die totalen Ausdehnungen oder Verkürzungen aller Längenfasern als gleich angenommen werden können, und indem man alsdann constatirte: 1) dass die totalen Ausdehnungen und Verkürzungen des Stabes der belastenden Kraft P bis zu einer gewissen Grenze proportional wachsen; 2) dass die denselben eine gewisse Grenze nicht überschreitenden Belastungen, je nachdem sie in dem einen oder dem andern Sinne wirken, entsprechenden Ausdehnungen und Verkürzungen des Stabes gleich sind. Bei den vorausgesetzten Umständen darf man nämlich ohne Zweifel annehmen, dass die Formänderung des Stabes in der Weise vor sich geht, dass der geometrische Ort der ursprünglich in irgend einem Querschnitt befindlich gewesenen materiellen Punkte beständig ein Querschnitt des Stabes bleibt, woraus folgt, dass die specifische Längenänderung λ aller Längenfasern in jedem Punkt desselben Querschnitts gleich gross ist. Falls man ferner sowohl die Schwere des Stabes, als auch den Druck der Luft, überhaupt des umgebenden Mittels gegen die Kraft P vernachlässigen darf, so wird offenbar nur in den Längenfasern des Stabes, welche Lage er auch haben mag, eine Spannung hervorgerufen, d. h. es fehlen die Seitenspannungen für diese Fasern. Nun ist für die Ausdehnung oder Verkürzung, welche in einem Punkt eines gewissen Körpers in einer gewissen Richtung stattfindet (abgesehen von der als constant vorausgesetzten Temperatur), keine andere Abhängigkeit denkbar, als diejenige von den sämmtlichen Spannungen, welche in diesem Punkt in verschiedenen Richtungen stattfinden; die in jedem Punkte desselben Querschnitts des dem Versuche unterworfenen Stabes gleiche specifische Längenänderung λ der betreffenden Längenfaser ist also nur von der in jedem solchen Punkte einzig vorhandenen specifischen Spannung σ der Längenfaser abhängig, und da λ in jedem Punkte desselben Querschnitts gleich ist, so muss nothwendig von σ dasselbe gelten, folglich $\sigma = P : q$ sein, falls mit q der ursprüngliche Flächeninhalt des Querschnitts bezeichnet wird. Weil aber σ seinem Ausdrucke $P : q$ zufolge nicht nur für alle Punkte desselben, sondern auch für alle Punkte aller Querschnitte gleich ist, so kann man dasselbe von λ sagen und deshalb $\lambda = a : l$ setzen, falls mit a die totale Längenänderung einer Faser oder des ganzen Stabes, und mit l die ursprüngliche Länge desselben bezeichnet wird. Würde nun durch den Versuch bewiesen, dass $\frac{P}{a}$ constant ist, so wäre auch $\frac{P:q}{a:l} = \frac{\sigma}{\lambda}$ constant, und fände man $a = a_1$, so wäre auch $a : l = a_1 : l$ oder $\lambda = \lambda_1$, d. h. es würden die obigen Elasticitätsgesetze bewiesen sein, wie wir behauptet haben.

Durch Versuche, welche auf den soeben angedeuteten Principien beruhen, lässt sich die Richtigkeit des ersten Gesetzes, sofern es sich auf Ausdehnung und absolute Spannung bezieht, für viele Materialien in der That constatiren; und zwar ergiebt sich, dass es mit hinlänglicher Genauigkeit so lange für richtig angenommen werden darf, als die specifische absolute Spannung das auf solche Weise zugleich bestimmbare Maass der vollkommenen absoluten Elasticität nicht

überschreitet. Was aber das erste Gesetz in Bezug auf rückwirkende Spannung, und was das zweite Gesetz betrifft, so ist die Bestätigung in der angedeuteten Art begreiflicherweise nicht ausführbar, indem es nicht möglich ist, ohne fremdartige störende Einflüsse hinzuzufügen, die Biegung eines Stabes zu verhindern, wenn man ihn so lang nimmt, dass seine Verkürzung durch eine drückende Last mit hinlänglicher Sicherheit gemessen werden kann. Man muss sich deshalb in dieser Beziehung mit mehr indirecten Prüfungen begnügen, welche darin bestehen, dass man die beobachteten Formänderungen möglichst einfach gestalteter Körper unter der Einwirkung gewisser Belastungen, namentlich die Durchbiegungen von auf relative Elasticität in Anspruch genommenen Stäben, mit denjenigen vergleicht, welche sich aus der Theorie bei Zugrundelegung der einstweilen als richtig vorausgesetzten beiden Elasticitätsgesetze ergeben. Weil sich hierbei eine genügende Uebereinstimmung, wenn auch nicht gerade immer bis zur Elasticitätsgrenze, so doch wenigstens bis zu einer solchen kleineren Belastung herausstellt, als man bei den Constructionen für höchstens zulässig erachtet, so darf man sich behufs der technischen Anwendungen, wie wir es in der Folge thun werden, zur Annahme der gleichzeitigen Richtigkeit beider Gesetze in allen Fällen für berechtigt halten.

Wenn man die bei mangelnder Seitenspannung stattfindende specifische Spannung σ einer Faser, die kleiner als die Grenze ist, bis zu welcher die beiden Gesetze zusammen gelten, durch die entsprechende specifische Ausdehnung oder Verkürzung λ dividirt, so erhält man jenen Gesetzen zufolge einen für jede einzelne Richtung in einem homogenen Körper constanten Quotienten, den man den dieser Richtung entsprechenden, bei einem isotropen Körper schlechtweg den Elasticitätsmodulus des Materials nennt und mit dem Buchstaben E zu bezeichnen pflegt. Indem die Gleichung $\frac{\sigma}{\lambda} = E$ für $\lambda = 1$ in $\sigma = E$ übergeht, so kann der Elasticitätsmodulus auch als diejenige Kraft definirt werden, durch welche ein Prisma vom Querschnitt $= 1$ auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt oder zu einer unendlich dünnen Schicht zusammengedrückt werden würde, falls dies möglich wäre und die Gesetze 1 und 2 beständig richtig blieben.

In Betreff der verschiedenen Methoden, welche man zur Ermittelung des Elasticitätsmodulus ausser durch einfache Ausdehnungsversuche von Drähten und Stäben in Anwendung gebracht hat, sowie auch in Betreff des in der Praxis zu vernachlässigenden Einflusses, den die Temperatur und andere Umstände auf diese Grösse ausüben, müssen wir auf die betreffenden theoretischen Abtheilungen dieses Handbuches verweisen. Nur auf die Bestimmung derselben durch Biegungsversuche werden wir im Folgenden (§. 10) zurückkommen. Die folgende Tabelle enthält mittlere Werthe dieser Grösse für die wichtigsten Bau- und Maschinenmaterialien in für den praktischen Gebrauch abgerundeten Zahlen, wobei, wie in diesem Kapitel immer, das Centimeter als Längen-, das Kilogramm als Gewichtseinheit zum Grunde liegt.

Material	E
Stabeisen	2,000,000
Eisendraht	2,100,000
Gusseisen	1,200,000
Angelassener Stahl	2,100,000

Material	E
Gehärteter Gussstahl	3,000,000
Kupfer	1,100,000
Kupferdraht	1,200,000
Messing	650,000
Messingdraht	1,000,000
Glockengut	320,000
Blei	50,000
Harte Hölzer, in der Richtung der natürlichen Fasern	120,000

(F. K. H. WIEBE, Lehre von den einfachen Maschinentheilen. I. p. 192.)

Der für harte Hölzer in der Tabelle enthaltene Werth von E ist fast genau derjenige, welcher den Versuchen von TREDGOLD zufolge dem Eichenholze zukommt, während er für Roth- und Weisstannenholz nach demselben Experimentator grösser, für Eschen-, Fichten-, Buchen- und Ulmenholz kleiner ist. Jedoch weichen die Angaben in dieser Beziehung sehr von einander ab, indem mannigfaltige Ursachen die Elasticität und Festigkeit der Hölzer modificiren. Wo grössere Genauigkeit erforderlich ist, kann man sich nur auf specielle Versuche mit dem anzuwendenden Materiale verlassen.

Um diese und spätere Angaben, welche sich auf das Kilogramm als Gewichts- und das Quadratcentimeter als Flächeneinheit beziehen, auf preussische Pfunde und den preussischen Quadratzoll als Flächeneinheit zu reduciren, müssen sie mit $14,625 = 14\frac{5}{8}$ multiplicirt werden.

I. Absolute Elasticität und Festigkeit.

§. 3.

Wenn der Elasticitätsmodulus eines Materials bekannt ist, so ist es dem vorigen Paragraphen zufolge sehr einfach, die Ausdehnung zu berechnen, welche eine daraus gefertigte Stange erleidet, die durch eine gegebene, die Elasticitätsgrenze nicht überschreitende Kraft gedehnt wird. Ist nämlich diese Kraft $= P$, der Querschnitt der Stange $= q$, so ist ihre specifische Spannung $= \frac{P}{q}$, und man hat der Definition des Elasticitätsmodulus gemäss die Gleichung:

$$\frac{P:q}{\lambda} = E, \quad \text{woraus } \lambda = \frac{P}{E \cdot q} \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

folgt, so dass also, wenn die Länge der Stange $= l$ war, ihre totale Verlängerung

$$\lambda \cdot l = \frac{P \cdot l}{E \cdot q}$$

ist. — Die zulässige Belastung bei gegebenem Querschnitt oder umgekehrt der erforderliche Querschnitt bei gegebener Belastung ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{P}{q} = k \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad 2).$$

Was die mit Sicherheit zulässige specifische Spannung k betrifft, so ist dafür das Maass σ' der vollkommenen absoluten Elasticität mit gleichzeitiger Berücksichtigung des Maasses K der absoluten Festigkeit maassgebend. Im Anhange dieses Paragraphen sind die Mittelwerthe dieser Grössen für die wichtigsten Materialien zusammengestellt, welche einer dehnenden Belastung ausgesetzt zu

werden pflegen. Man sieht daraus, dass in der Regel $k = \frac{1}{2}\sigma'$ und nur bei Gusseisen und Blei beträchtlich kleiner, bei Kupferblech aber grösser angenommen worden ist. Die Vergleichung der Werthe von σ' und K rechtfertigt diese Annahmen. Indessen lässt man sich auch durch andere Rücksichten bei der Wahl des Sicherheitscoefficienten bestimmen. Bei einem Materiale, welches wie z. B. Holz den schädlichen Einflüssen der Witterung ausgesetzt ist, nimmt man ihn kleiner als bei Metallen. Bei stabilen Constructionen und ruhigen Belastungen darf man je nach den Umständen bis zum $1\frac{1}{2}$fachen des unten mitgetheilten Werthes von k hinaufgehen, bei solchen Constructionstheilen jedoch, die häufigen Erschütterungen ausgesetzt sind, muss man den Werth von k zuweilen noch geringer annehmen. Die Beurtheilung solcher Umstände muss der praktischen Erfahrung des ausführenden Ingenieurs überlassen bleiben. — In Beziehung auf die auf der folgenden Seite stehende Tabelle ist noch zu bemerken, dass die absolute Festigkeit des ausgeglühten Eisen- und Kupferdrahts nur etwa halb so gross ist, als die des ungeglühten, worauf die Angaben sich beziehen. Die absolute Festigkeit der Hölzer ist, wie sich erwarten lässt, senkrecht gegen die Richtung der natürlichen Fasern bedeutend kleiner, als in der Richtung derselben, für Eichenholz nach Tredgold etwa nur $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$; für weichere Hölzer ist der Unterschied noch grösser. Die absolute Festigkeit des Eisenblechs ist nach Navier etwas grösser in der Walzrichtung, als senkrecht dazu. Die absolute Festigkeit eines vertical gegossenen Eisenstabes ist nach Rennie etwas grösser, als die eines horizontal gegossenen. Jedoch sind diese und andere Unterschiede zu gering, als dass man bei praktischen Berechnungen quantitativ darauf Rücksicht zu nehmen brauchte.

Die zulässige Belastung der Hanfseile kann nur nach ihrer absoluten Festigkeit beurtheilt werden und ist ausser von der Güte des Hanfs und der Arbeit auch von mehreren andern Umständen abhängig, welche Erwähnung verdienen. Es ist leicht begreiflich, warum stark gedrehte Seile weniger tragen, als minder stark gedrehte. Aus einem ähnlichen Grunde ist auch die absolute Festigkeit der Patentseile (solcher, bei denen mehrere Litzen um eine innere gerade gestreckte Litze, die sogenannte Seele, herumgewunden sind) grösser, als diejenige der gewöhnlichen Seile ohne Seele, wenn man bei ersteren den Querschnitt und die Tragfähigkeit der Seele, die in der That bald reisst und von schlechterem Materiale genommen werden kann, nicht in Anschlag bringt. Bei den Patentseilen ist nämlich der Unterschied der Drehung und also der Dehnung und Spannung der Garne an der Innen- und Aussenseite einer Litze, welcher Unterschied einem Verluste an Tragfähigkeit gleich zu achten ist, geringer als bei gewöhnlichen Seilen ohne Seele. Die absolute Festigkeit der Seile steht auch in geradem Verhältnisse mit der Feinheit der Garne. Ferner kann man die Festigkeit nasser und getheerter Seile nur $\frac{3}{4}$ so gross veranschlagen, als diejenige von trockenen und ungetheerten; die Feuchtigkeit macht nämlich die Hanffasern in den Garnen anschwellen und verursacht dadurch schon eine gewisse Spannung derselben. Endlich ist es nicht gleichgültig, ob die Seile warm oder kalt registrirt sind, d. h. ob die einzelnen Garne getheert und vor

dem Erkalten zusammengedreht, oder ob die ganzen Seile nach vollendeter Arbeit getheert sind. Die warm registrirten Seile sollen nämlich stärker sein. Für laufende Seile (solche, welche in Bewegung sind, über Rollen gehen u. s. w.) muss man einen kleineren Sicherheitscoefficienten wählen, als für stehende (solche, an denen eine ruhige Last aufgehängt ist). Für erstere kann man $^1/_5$, für letztere $^1/_3$ von der absoluten Festigkeit als zulässige dauernde Belastung in Rechnung bringen.

Wenn man bei Drahtseilen der Bequemlichkeit wegen den Querschnitt als voll in Rechnung bringt, wie es gewöhnlich geschieht, so muss natürlich aus diesem Grunde und auch wegen der schon im unbelasteten Seile vorhandenen Spannung der Drähte der Werth von k viel kleiner angenommen werden, als untenstehend für Eisendraht angegeben ist. Aus Versuchen, welche auf Befehl der englischen Admiralität angestellt wurden, lässt sich entnehmen, dass bei gleicher Tragfähigkeit ein Drahtseil nur etwa 0,4 von dem Durchmesser des Hanfseils stark zu sein braucht, weil nämlich das Maass der absoluten Festigkeit des ersteren ungefähr sechsmal so gross ist, als das des letzteren.

Material	σ'	K	k
Stabeisen	1300	4000	650
Eisendraht	2100	6600	1100
Stahl	2500	8000	1300
Gusseisen	1000	1300	250
Gewalztes Kupferblech	300	2100	250
Kupferdraht	1200	5000	600
Gewalztes Blei	100	130	30
Holz, in der Richtung der natürlichen Fasern	200	800	80
Trockenes und ungetheertes Hanfseil: stehendes	—	600	200
Trockenes und ungetheertes Hanfseil: laufendes	—	—	120
Lederner Riemen	—	—	25

1711. Réaumur *Expériences pour connaître si la force des cordes surpasse la somme des forces des fils etc. Mém. de l'ac. de Paris.* p. 7 ed. bat.

1833. Navier *Rés. des leçons etc. sur l'applic. de la méc. etc.* I. — Deutsch von Westphal u. d. Titel: Mechan. d. Baukunst. p. 10. (Resultate der Vers. versch. Experimentatoren) *.

1837. A. F. W. Brix Abhandl. über die Cohäsions- und Elastic.-Verhältnisse einiger etc. Eisendrähte *.

1846. Karmarsch in Prechtl's Encyklop. Bd. 14. p. 527. (Festigk. der Hanftaue.) — Bd. 19. p. 536. (Resultate der auf Befehl der engl. Admiral. angestellten Vers. mit Hanf-, Draht- und Kettentauen) *.

§. 4. Körper von gleichem Widerstande.

Gewöhnlich sind die auf absolute Festigkeit in Anspruch genommenen stabförmigen Körper so kurz, dass ihr eigenes Gewicht gegen ihre Belastung vernachlässigt werden darf. Ist aber ein solcher Körper, während er in verticaler Lage an seinem unteren Ende belastet ist, sehr lang, wie es bei Schachtgestängen u. s. w. vorkommen kann, so trägt sein Gewicht zu seiner Spannung wesentlich bei; dieselbe nimmt von unten nach oben stetig zu, und es muss, wenn die prismatische Form beibehalten werden soll, bei der Schätzung der

erforderlichen Grösse des Querschnitts die Summe aus dem Eigengewichte und der angehängten Last als Totalbelastung in Rechnung gestellt werden. In einem solchen Falle kann es aber auch der Materialersparniss wegen vortheilhaft sein, von der Gleichheit der Querschnitte Abstand zu nehmen, und dann entsteht die Aufgabe, diejenige Relation zwischen der stetig veränderlichen Grösse jedes Querschnitts und seiner Entfernung vom unteren belasteten Ende des Körpers aufzufinden, bei welcher die specifische Spannung und folglich auch die Wahrscheinlichkeit des Zerreissens in jedem Querschnitte gleich gross ist. Körper von solcher Eigenschaft für irgend eine Art der Belastung nennt man überhaupt Körper von gleichem Widerstande. Ist im vorliegenden Falle

y der Inhalt eines Querschnitts, dessen Entfernung vom unteren Ende $= x$ ist,

γ das specifische Gewicht des Materials (Gewicht eines Kubikcentimeters),

P die angehängte Last,

e die Basis der natürlichen Logarithmen,

k die specifische Spannung, welche in jedem Querschnitte vorhanden sein soll,

so ist die Relation zwischen y und x, welche der letzteren Bedingung entspricht:

$$y = \frac{P}{k} \cdot e^{\frac{\gamma x}{k}}.$$

Die Gestalt der Querschnitte ist dabei gleichgültig; nur muss vorausgesetzt werden, dass ihre Schwerpunkte in der geraden Linie liegen, nach welcher die Last zieht, um annehmen zu dürfen, dass die specifische Spannung in jedem Punkte desselben Querschnitts gleich gross ist.

Die obige Formel lässt sich folgendermassen herleiten. Das Gewicht des als gleichmässig schwer vorausgesetzten Körpers, vom unteren Ende bis zum Querschnitte y gerechnet, ist

$$= \gamma \cdot \int_0^x y \cdot dx,$$

und deshalb ist die Gleichung, welche unmittelbar die zu erfüllende Bedingung ausdrückt,

$$ky = P + \gamma \cdot \int_0^x y \cdot dx.$$

Aus ihr folgt, wenn man differenzirt:

$$k \cdot dy = \gamma y \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\gamma}{k} \cdot dx$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$, und wenn man beachtet, dass die untere Endfläche $= \frac{P}{k}$ sein muss:

$$ln \cdot y - ln \cdot \frac{P}{k} = ln \cdot \frac{ky}{P} = \frac{\gamma x}{k}$$

oder

$$\frac{ky}{P} = e^{\frac{\gamma x}{k}}$$

$$y = \frac{P}{k} \cdot e^{\frac{\gamma x}{k}}.$$

§. 5. Wandstärke von Röhren und kugelförmigen Gefässen.

Eine wichtige Anwendung findet die absolute Elasticität und Festigkeit namentlich der Metalle insofern, als man Röhren und Gefässe daraus verfertigt, welche durch eingeschlossene tropfbare oder elastische Flüssigkeiten einen von innen nach aussen gerichteten Druck erleiden, der sie erweitert und zu zerreissen strebt. Dieser Druck findet in normaler Richtung auf die innere Wandfläche statt und kann in den meisten Fällen für alle Punkte derselben als constant gelten, bei langen Leitungsröhren wenigstens für alle Punkte desselben Querschnitts. Bei Dampfkesseln z. B. kann der von der Dampfspannung herrührende innere Normaldruck wegen des verhältnissmässig geringen specifischen Gewichts des Dampfes auf den höchsten und tiefsten und alle andern Punkte als gleich vorausgesetzt werden, während der allerdings ungleiche, vom Gewichte des Wassers herrührende Druck auf den Kesselboden, bei Mittel- und Hochdruckkesseln wenigstens, gegen den Dampfdruck vernachlässigt werden darf.

Wenn man den als constant vorausgesetzten Ueberschuss des inneren auf die Flächeneinheit bezogenen oder specifischen Drucks über den äusseren mit p, den inneren Radius einer *kreisförmig cylindrischen Röhre* mit r, die erforderliche Wandstärke, welche der Bedingung entspricht, dass die specifische Spannung in irgend einem Punkte höchstens $= k$ sein soll, mit δ bezeichnet, so ist nach Brix:

$$\delta = r\left(e^{\frac{p}{k}} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden. Für einen nicht sehr grossen Druck p erhält man hieraus die Näherungsformel:

$$\delta = \frac{pr}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2),$$

derzufolge *die erforderliche Wandstärke einer kreisförmig cylindrischen Röhre näherungsweise dem inneren Ueberdruck und der lichten Weite proportional ist.* Bei grösserem Druck liefert diese Regel eine zu geringe Wandstärke. — Bei der Herleitung dieser Formeln sind nur die Ausdehnungen der concentrischen kreisförmigen Fasern in Betracht gezogen worden, aus denen man ein zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten enthaltenes scheibenförmiges Röhrenstück bestehend denken kann. Diese Ausdehnungen sind allerdings die grössten und deshalb diejenigen, welche die erforderliche Wandstärke bestimmen; sie sind jedoch ausser von den Spannungen jener Fasern selbst streng genommen auch von den in der Brix'schen Theorie vernachlässigten Seitenspannungen abhängig, welche unter allen Umständen in radialer Richtung als von innen nach aussen von $p + p'$ bis p' (unter p' den

äusseren Druck verstanden) abnehmende rückwirkende Spannungen, bei einer geschlossenen Röhre ausserdem noch als absolute Spannungen in der Längenrichtung der Röhre, von dem Druck auf die Endflächen herrührend, auftreten. Endlich würde bei einer kurzen geschlossenen Röhre, z. B. bei einem cylindrischen Dampfkessel, der Widerstand der Böden in Betracht zu ziehen sein, welcher der Erweiterung der ringförmigen Röhrenquerschnitte und somit der Ausdehnung der gedachten concentrischen kreisförmigen Fasern in der Weise entgegenwirkt, dass diese Ausdehnung von den Enden der Röhre nach der Mitte hin zunimmt und selbst hier stets kleiner bleibt, als sie bei der offenen Röhre unter übrigens gleichen Umständen sein würde. Die Erfahrungen bei Anwendung der Formel 1) auf offene sowohl als geschlossene Röhren lehren übrigens, dass die erwähnten vernachlässigten Umstände nur von untergeordnetem Einflusse sein können. Auszunehmen ist nur der Fall, wo der Druck auf die Endflächen der geschlossenen Röhre nicht ein ruhiger hydrostatischer, sondern ein stossweiser Druck ist, davon herrührend, dass die in der Röhre fliessende Flüssigkeit plötzlich abgesperrt und in ihrer Bewegung gehemmt wird. Auf diesen Fall werden wir an einer andern Stelle, wo von den Anwendungen der Stossgesetze die Rede sein wird, zurückkommen.

Wenn ein kugelförmiges Gefäss (aus einem isotropen Material) dem in jedem Punkte gleichen inneren Ueberdruck p ausgesetzt ist, so findet man bei Zugrundelegung derselben Voraussetzungen, worauf die Gleichung 1) beruht, für die erforderliche Wandstärke δ die Formel:

$$\delta = \frac{pr}{2k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3),$$

unter r den inneren Radius verstanden. Sie lehrt, dass die Wandung eines kugelförmigen Gefässes bei demselben inneren Drucke und gleicher Sicherheit nur höchstens halb so dick zu sein braucht, als diejenige einer cylindrischen Röhre von gleichem inneren Durchmesser.

Wenn man von der Erweiterung der cylindrischen Röhre in Folge ihrer Elasticität abstrahirt und nur die Festigkeit in Betracht zieht, so kann die Formel 2) auf folgende Weise leicht erhalten werden. Die offenbar gleichgültige Länge der offenen Röhre sei $= 1$. In Betreff des Bruchs bei übermässiger Spannung ist die wahrscheinlichste Annahme die, dass er in den Durchschnitten des Röhrenstücks mit einer durch seine Axe gelegten Ebene erfolgen wird; die gesammte Trennungsfläche ist dann $= 2\delta$. Die Sprengung würde bewirkt werden durch den zur Trennungsfläche senkrechten Druck auf eine der beiden Hälften des Röhrenstücks, welcher bekanntlich dem Producte aus dem specifischen Normaldrucke und der auf der Richtung des fraglichen resultirenden Drucks senkrechten Projection der gedrückten Fläche gleich, also $= p \cdot 2r$ ist. Nimmt man nun an, dass die Trennung bei übermässigem Druck in allen Punkten der muthmasslichen Trennungsfläche 2δ gleichzeitig erfolgen würde, womit es in Einklang stehen würde, die zu derselben senkrechte Spannung in allen ihren Punkten als gleich gross anzunehmen, so ist die Gleichung, welche ausdrückt, dass die gedachte Trennung nicht stattfindet, oder dass jene gleichmässig vertheilte specifische Spannung nicht $= K$, sondern nur $= k$ ist, die folgende:

$$k \cdot 2\delta = p \cdot 2r,$$

woraus

$$\delta = \frac{pr}{k}$$

sich ergiebt.

Diese Entwickelung, welche seit ihrem Urheber MARIOTTE lange Zeit für genügend erachtet würde, wird für eine einigermassen beträchtliche Wandstärke unhaltbar, wenn man, wie es sein muss, auf die Elasticität und also die Ausdehnung der Röhre in Folge der Spannung Rücksicht nimmt. Man könnte zwar auch bei dem Zugeständnisse dieser Ausdehnung zu der MARIOTTE'schen Formel gelangen, wenn man sie für alle unendlich dünnen concentrischen Cylinderschalen, woraus man sich die Röhre bestehend denken kann, als specifisch gleich voraussetzte. Dann müssten aber die Halbmesser dieser Cylinderschalen alle in demselben Verhältnisse grösser werden, was offenbar absurd ist, weil dann auch in dem gleichen Verhältnisse die Röhrenwand dicker werden müsste. Am passendsten scheint es zu sein, mit BRIX anzunehmen, dass die Dicke der Wand unverändert bleibt. Bei dieser Annahme stellt sich die Berechnung für die kreisförmig cylindrische Röhre folgendermassen dar.

Es sei wieder ein Röhrenstück von der Länge $= 1$ vorausgesetzt; λ_1 sei die specifische Vergrösserung des inneren Radius r, λ diejenige des Radius x irgend einer der concentrischen Cylinderschalen. Dann ist der Annahme zufolge:

$$x(1+\lambda) - r(1+\lambda_1) = x - r,$$

also

$$x \,.\, \lambda - r\lambda_1 = 0$$

$$\frac{r}{x} = \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

Weil nun die specifischen Vergrösserungen der Radien der Cylinderschalen denjenigen ihrer Umfänge gleich, die letzteren aber den specifischen Spannungen der Cylinderschalen (abgesehen von den etwa vorhandenen Seitenspannungen) proportional sind, so sind diese Spannungen der letzten Gleichung zufolge umgekehrt den Radien proportional, nehmen also von innen nach aussen ab. Die specifische Spannung der innersten Schale muss man also $= k$ setzen, um sicher zu sein, dass sie an keiner Stelle grösser ist; ist dann ferner σ diejenige der Schale vom Radius x, so hat man:

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{r}{x}.$$

Die totale Spannung $\sigma \,.\, dx$ der Schale vom Radius x und der Dicke dx ist also:

$$\sigma \,.\, dx = kr \,.\, \frac{dx}{x},$$

folglich die Totalspannung des ganzen Röhrenstücks:

$$kr \,.\int_r^{r+\delta}\frac{dx}{x} = kr \,.\, ln\,\frac{r+\delta}{r}.$$

Diese Spannung, doppelt genommen, muss dem hydrostatischen Drucke $= p \,.\, 2r$ auf die Hälfte des Röhrenstücks Gleichgewicht halten, d. h. es muss

$$kr \,.\, ln\,\frac{r+\delta}{r} = p \,.\, r$$

oder

$$\frac{r+\delta}{r} = e^{\frac{p}{k}},$$

also

$$\delta = r\left(e^{\frac{p}{k}} - 1\right),$$

sein, welches die Formel 1) ist. Man kann daraus eine für die meisten Fälle ausreichende Näherungsformel erhalten, welche für den praktischen Gebrauch bequemer ist, indem man die Exponentialfunction $e^{\frac{p}{k}}$ in die bekannte, nach den ganzen Potenzen des Exponenten fortschreitende Reihe entwickelt und davon nur die drei oder vier ersten Glieder berücksichtigt. Dadurch bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}\delta &= r \cdot \left[\frac{p}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{k}\right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{p}{k}\right)^3\right] \\ &= \frac{pr}{k} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{k} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad a),$$

welchem Ausdrucke, wie man sieht, der übrigens stets kleinere 2) um so näher kommt, je kleiner der Bruch $\frac{p}{k}$ ist.

Dass es nicht nöthig ist, bei einer geschlossenen Röhre auf die als gleichmässig vertheilt vorauszusetzende specifische Spannung σ Rücksicht zu nehmen, welche durch den Druck $= p \cdot \pi r^2$ auf die kreisförmigen Endflächen in der Längenrichtung der Röhre hervorgerufen wird, ergiebt sich daraus, dass

$$\sigma = \frac{p \cdot \pi r^2}{\pi[(r+\delta)^2 - r^2]} = \frac{pr}{2\delta\left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)},$$

die grösste specifische Spannung in der Richtung des Umfangs hingegen der Gleichung a) zufolge:

$$k = \frac{pr}{\delta}\left(1 + \frac{p}{2k} + \ldots\right),$$

mithin

$$\frac{k}{\sigma} = 2\left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)\left(1 + \frac{p}{2k} + \ldots\right),$$

folglich immer $\sigma < \frac{k}{2}$ ist. Abgesehen von der Abhängigkeit, in welcher die Ausdehnung in einer gewissen Richtung von der Spannung in einer darauf senkrechten Richtung stehen könnte, ist also auch immer die specifische Ausdehnung der geraden Längenfasern noch nicht halb so gross, als die grösste specifische Ausdehnung der concentrischen kreisförmigen Fasern; ja es lässt sich aus der erfahrungsmässigen Zusammenziehung des Querschnitts eines ausgereckten prismatischen Körpers schon schliessen, dass die Ausdehnung der kreisförmigen Fasern durch die Spannung σ sogar vermindert werden wird.

Die Formel 1) ist in dem preussischen Regulativ, die Anlage der Dampfkessel betreffend, vom 6. September 1848, zu Grunde gelegt worden. Ihm zufolge soll, wenn n den Ueberdruck des Dampfes in Atmosphären bedeutet, für Cylinderkessel aus Eisenblech:

$$\delta = r\left(e^{0{,}003 \, . \, n} - 1\right) + \frac{1}{10} \text{ Zoll} \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad \text{b)},$$

für **gusseiserne Siederöhren**, die jedoch nur bis zu einem Durchmesser von 18 Zoll erlaubt sind:

$$\delta' = r\left(e^{0{,}01 \, . \, n} - 1\right) + \frac{1}{3} \text{ Zoll} \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad \text{c)}$$

sein. Im ersten Falle ist $k = 344$, im zweiten $k = 103$ Kilogramme für einen Quadratcentimeter (5000 und 1500 Pfund pro Quadratzoll) angenommen, also bedeutend weniger, als man zufolge der Tabelle in §. 3 in gewöhnlichen, weniger mit Zufälligkeiten und Gefahren verbundenen Fällen annehmen darf. Auch musste die Verminderung der Festigkeit und die Abnutzung durch das Feuer berücksichtigt werden. Den constanten Summanden von respective $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{3}$ Zoll hat man deswegen hinzugefügt, weil auch ohne einen inneren Ueberdruck die Kessel doch eine gewisse Stärke haben müssten, welche praktisch herzustellen und genügend ist, um eine merkliche Verbiegung in Folge des eigenen Gewichts zu hindern, während die Formeln ohne diese Summanden für $n = 0$ auch $\delta = 0$ liefern würden. Diese Hinzufügung eines gewissen vom Material abhängigen Summanden ist auch in andern Fällen aus denselben Gründen üblich.

Die hier vorgetragene Theorie der Röhrenstärken beruht auf der Annahme, dass der Querschnitt eines gedehnten Stabes unverändert bleibt, während seine Länge und folglich auch sein Volumen der dehnenden Kraft proportional zunehmen. Schon früher hatte Barlow eine andere Formel zur Berechnung der Röhrenstärken aufgestellt, bei deren Herleitung er von der Annahme ausgegangen war, dass das Volumen eines gedehnten Stabes unverändert bleibt, dass nämlich sein Querschnitt in demselben Verhältnisse kleiner wird, als seine Länge zunimmt. Wäre dies richtig, so müsste, falls die Länge einer Röhre als unveränderlich angenommen wird, auch der Inhalt des ringförmigen Querschnitts bei seiner Erweiterung constant bleiben, folglich die Breite der Ringfläche, d. h. die Wandstärke der Röhre, kleiner werden. Weder die Annahme von Brix noch die von Barlow entspricht der Wirklichkeit genau; diese liegt vielmehr in der Mitte zwischen beiden, indem der Querschnitt eines gedehnten Stabes zwar kleiner wird, wenngleich nicht in dem Maasse, als die Länge zunimmt. *A priori* lässt sich deshalb zwischen den beiden Theorien nicht gut eine Entscheidung treffen; jedoch hat Brix aus ihren Consequenzen die Unhaltbarkeit der Barlow'schen Formel nachgewiesen.

Was die Formel 3) für die Wandstärke des **kugelförmigen Gefässes** betrifft, so denke man sich den Durchschnitt desselben mit irgend einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebene A und untersuche die Gesammtspannung in diesem Querschnitte, welche dem Drucke $= p \, . \, \pi r^2$ auf die innere Fläche der halben Hohlkugel Gleichgewicht halten muss. Die Hohlkugel denke man aus concentrischen Schalen von der Dicke dx bestehend, jede einzelne Schale aus Fasern, welche den Meridianen jener als Aequatorialebene gedachten Ebene A folgen. Unter der Voraussetzung, dass die Dicke der Wand bei der Ausdehnung des Gefässes sich nicht ändert, ist dann wieder die specifische Spannung σ einer beliebigen solchen Faser umgekehrt proportional dem Radius x der Schale, zu welcher sie gehört; also, wenn wieder die grösste specifische Spannung, nämlich diejenige an der Innenseite der Wand, $= k$ gesetzt wird, so ist:

$$\sigma = k \cdot \frac{r}{x}.$$

Nun besteht der gedachte Querschnitt des kugelförmigen Gefässes, in welchem es von der Ebene A geschnitten wird, aus concentrischen ringförmigen Elementen von der Breite dx, nämlich aus den Querschnitten sämmtlicher concentrischen Kugelschalen von dieser Dicke dx. In demjenigen dieser ringförmigen Elemente, dessen Radius $= x$ ist, ist die Totalspannung:

$$\sigma \,.\, 2\pi x \,.\, dx = 2\pi k r \,.\, dx.$$

Folglich ist die Totalspannung des ganzen Querschnitts:

$$2\pi k r \,.\int_r^{r+\delta} dx = 2\pi k r \,.\, \delta$$

und wenn man sie dem Drucke $p \,.\, \pi r^2$ gleichsetzt, so ergiebt sich:

$$\delta = \frac{pr}{2k}.$$

Indem die specifische Spannung k, wenn man die Wandstärke eines kugelförmigen Gefässes der Formel 3) gemäss berechnet hat, in jedem Punkte der inneren Wandfläche nach allen möglichen tangentialen Richtungen zugleich stattfindet, während die Werthe, welche man k beizupflegen pflegt, auf Versuchen beruhen, wobei die Spannung nur nach einer einzigen Richtung erzeugt wurde, so könnte man über die Zulässigkeit jener Formel Zweifel erheben. Es verdient deshalb bemerkt zu werden, dass sie durch Versuche geprüft und bewährt gefunden wurde. Unter Andern setzte NAVIER ein fast kugelförmiges Gefäss aus Schwarzblech einem messbaren inneren Druck p aus und vergrösserte denselben so lange, bis das Gefäss einen Riss bekam. Indem er dann die absolute Festigkeit K dieses Blechs nach der Formel

$$K = \frac{pr}{2\delta}$$

berechnete, fand er sie wenigstens nicht kleiner, als wenn das Blech durch eine einseitig wirkende Belastung zerrissen wurde, woraus folgt, dass man auch in der Formel 3) für k nicht etwa einen kleineren Werth einsetzen muss, als sonst.

1707. PARENT *Des résistances des tuyaux cylindr. etc. Mém. de l'Ac. de Paris.* p. 135.
1833. NAVIER *Rés. des leçons etc. sur l'applic. de la méc. etc.* I. Chap. XIII*.
1834. *BRIX Ueber die Bestimmung der erforderl. Wandstärke cylindrischer Röhren. Verh. d. Ver. zur Bef. d. Gewerbfl. in Preussen. p. 119. (Enthält auch die BARLOW'sche Theorie nebst Kritik.)*

II. Einfache rückwirkende Elasticität und Festigkeit.

§. 6.

Ueber das Maass der vollkommenen rückwirkenden Elasticität der Bau- und Maschinenmaterialien, welches der in §. 1 vorangestellten Grundregel zufolge ihrer höchstens zulässigen Belastung durch eine drückende Kraft als maassgebend zu Grunde gelegt werden müsste, hat man durchaus keine sichere Kenntniss. Man ist deshalb genöthigt, bei Beurtheilung der zulässigen Belastung sich hier hauptsächlich an die Versuche über die rückwirkende Festigkeit und an die bei ausgeführten Constructionen gemachten Erfahrungen zu halten. Im Allgemeinen kann man dabei den Sicherheitscoefficienten für Metalle $= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{7}$,

für Hölzer und Steine $=\frac{1}{10}$ nehmen, d. h. im ersten Falle $k=\frac{1}{4}K$ bis $\frac{1}{7}K$, im zweiten $k=\frac{1}{10}K$ setzen. Jedoch muss man dann bei den Steinen sicher sein, dass der Druck recht gleichförmig über die ihn fortpflanzenden Steinflächen vertheilt ist, widrigenfalls der Coefficient $\frac{1}{10}$ noch nicht die genügende Sicherheit gewähren würde.

Die Angaben über die rückwirkende Festigkeit der Materialien sind sehr abweichend, was hauptsächlich darin seinen Grund hat, dass die verschiedenen Experimentatoren verschiedene Kennzeichen als bestimmend erachteten, um die Festigkeit für überwunden zu erklären; einige Körper, namentlich weiche Metalle, werden nämlich blos zusammengedrückt, andere gänzlich zertrümmert, und zudem zeigen die letzteren meistentheils schon bei einem weit geringeren Drucke Sprünge und Risse. Bei den Versuchen wurden die Materialien gewöhnlich in Form von Würfeln angewandt; Rondelet und Andere hielten bei dieser Form die rückwirkende Festigkeit für am grössten, insbesondere bei Steinen. Jedoch hat Hodgkinson durch spätere Versuche mit Prismen aus Stein, Holz, Schmiedeeisen und namentlich Gusseisen gezeigt, dass die Festigkeit mit zunehmender Höhe der Prismen durchweg abnimmt, so lange die letztere nicht grösser ist als die dreifache Dicke, dass sie dann nahezu constant bleibt, bis die Höhe das Sechsfache der Dicke beträgt. — Eine andere Bemerkung, welche hier gemacht werden muss, ist die, dass man den Versuchen zufolge nicht ohne Einschränkung den Widerstand eines prismatischen Körpers gegen eine in der Richtung der Axe drückende Kraft der Grösse des Querschnitts proportional, d. h. $P=k\,.\,q$ setzen darf, dass vielmehr dieses Gesetz nur bei ähnlichen Querschnitten genau richtig ist, während im entgegengesetzten Falle bei gleichem Inhalte des Querschnitts die Widerstandsfähigkeit zunimmt, wenn der Umfang abnimmt. Sie ist demnach bei einem regulären Querschnitte grösser, als bei einem nicht regulären von gleicher Seitenzahl, bei ersterem aber wieder um so grösser, je grösser die Anzahl der Seiten ist, d. h. je mehr das Polygon sich einem Kreise nähert. Uebrigens ist dieser Einfluss der Querschnittsform nicht so beträchtlich, dass man in gewöhnlichen Fällen darauf Rücksicht nehmen müsste, und nicht so gründlich untersucht, dass man ihn quantitativ in Rechnung stellen könnte.

Die rückwirkende Festigkeit der Hölzer ist grösser, wenn sie in der Richtung der natürlichen Fasern, als wenn sie senkrecht dagegen gedrückt werden; doch ist der Unterschied weit geringer, als zwischen den absoluten Festigkeiten für beide Richtungen. Natürliche Steine, welche ein geschichtetes Gefüge haben, leisten einen grösseren Widerstand, wenn der Druck senkrecht gegen die Richtung der Schichten stattfindet, als in einer andern Richtung. Die Festigkeit des Mörtels nimmt, selbst wenn er schon mehrere Jahre alt ist, noch merklich mit der Zeit zu.

Wenn man die erforderliche Wandstärke δ einer von aussen gedrückten cylindrischen Röhre unter Zugrundelegung derselben Voraussetzungen berechnet, worauf die Formel 1) des vorigen Paragraphen beruht, so findet man, wenn r den

inneren Radius, p den specifischen Ueberdruck auf die äussere Wandfläche, k die höchstens zulässige specifische rückwirkende Spannung bedeutet:

$$ln\left(1+\frac{\delta}{r}\right) = \frac{p}{k}\left(1+\frac{\delta}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{a)},$$

woraus man unter der Voraussetzung, dass $\frac{\delta}{r}$ ein hinlänglich kleiner Bruch ist, um dessen zweite Potenz gegen die Einheit vernachlässigen zu dürfen, mit Rücksicht auf die bekannte Reihenentwickelung:

$$ln\left(1+\frac{\delta}{r}\right) = \frac{\delta}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + \ldots$$

die Näherungsformel

$$\delta = \frac{2p}{2k-3p} \cdot r \quad \ldots\ldots\ldots \text{b)}$$

ableiten kann. Da der Logarithmus der Zahl $\left(1+\frac{\delta}{r}\right)$ stets kleiner sein muss, als diese Zahl selbst, so würde die Formel a) einen unmöglichen Werth von δ liefern, falls $p \gtreqless k$ wäre. Dieser Umstand allein würde zwar nicht gerade als ein Mangel der Formel zu betrachten sein, indem, wenn $p = k$ wäre, schon die vernachlässigte in radialer Richtung stattfindende specifische rückwirkende Spannung an der äusseren Oberfläche der Röhre, wo sie unmittelbar mit dem äusseren Druck im Gleichgewicht sein muss, $\gtreqless k$ sein würde. Allein es sind die Voraussetzungen der Formel a) dem wirklichen Verhalten einer äusserlich gedrückten Röhre hauptsächlich insofern nicht wohl angemessen, als erfahrungsmässig, und wie man auch *a priori* leicht einsieht, ein äusserer Druck die möglicherweise etwas abgeplattete Röhre noch mehr platt zu drücken und schliesslich zu zerknicken anstatt einfach in sich zu zerdrücken strebt, während ein innerer Druck gerade umgekehrt die mangelhafte Kreisform herzustellen sucht. Diese Verschiedenheit des Verhaltens wird offenbar um so mehr hervortreten, je geringer die Wandstärke im Verhältniss zur Röhrenweite ist, also gerade in den gewöhnlichen Fällen am meisten, weshalb es nöthig ist, bei Berechnung der äusserlich gedrückten Röhren von andern Principien auszugehen, die jedoch an dieser Stelle nicht entwickelt werden können. Das oben erwähnte preussische Regulativ vom 6. September 1848 schreibt für die durch die Dampfkessel hindurchgehenden cylindrischen Feuerröhren aus Eisenblech die Blechstärke:

$$\delta = 0{,}0134 \,.\, r\sqrt[3]{n} + 0{,}05 \text{ Zoll} \quad \ldots\ldots \text{c)}$$

vor, unter n die Atmosphärenzahl des äusseren Ueberdrucks verstanden.

Für einige der wichtigsten Materialien sind hier Mittelwerthe der Grössen K und k zusammengestellt:

Material	K	k
Schmiedeeisen	4500	650
Gusseisen	10000	1500
Hölzer	400	40
Gewöhnlicher Ziegelstein	60	6
Guter Mörtel von Kalk und Sand	40	6

Die Angaben für Hölzer können als Mittelwerthe für Eichen-, Fichten-, Rothtannen- und Rothbuchenholz gelten. Weisstannenholz hat eine viel kleinere rückwirkende Festigkeit. Bei Gusseisen ist es rathsam, den in der Tabelle für k angegebenen Werth zu verkleinern,

sobald die Höhe der gedrückten Säule das Sechsfache ihrer Dicke übertrifft, wenn auch dabei eine nachweisbare Biegung noch nicht eintritt. Die Festigkeiten der meisten natürlichen Steine, selbst ähnlicher Varietäten, sind je nach ihrem Vorkommen zu sehr verschieden, als dass man brauchbare Mittelwerthe dafür angeben könnte. Man darf sich hier nur auf einen leicht anzustellenden Versuch mit der gerade vorliegenden Gesteinsart oder auf Erfahrungen verlassen, welche speciell in Betreff dieser bei ausgeführten Bauwerken gemacht worden sind.

III. Relative Elasticität und Festigkeit.

§. 7.

Wenn ein Stab oder Balken, d. h. ein prismatischer Körper von überwiegender Längendimension, gebogen wird, so werden, abgesehen von sonstigen Wirkungen, die nach der convexen Seite zu liegenden Fasern (Längenfasern) verlängert, die nach der concaven Seite zu liegenden verkürzt; die ersteren leisten der Biegung durch ihre absolute, die letzteren durch ihre rückwirkende Elasticität Widerstand. Den geometrischen Ort derjenigen Fasern, welche, indem sie im Inneren des Körpers den Uebergang von den ersteren zu den letzteren bilden, weder verlängert noch verkürzt sind, nennt man die neutrale Faserschicht. Die Curve, in welche die ursprünglich gerade Axe des Balkens bei seiner Biegung übergeht, d. h. den geometrischen Ort der materiellen Punkte, die sich ursprünglich in der Axe befanden, nennt man die elastische Linie.

Indem hier die Theorie der relativen Elasticität zunächst in der sehr beschränkten Weise entwickelt werden soll, wie es in der Regel zu geschehen pflegt, wie es jedoch für die meisten technischen Anwendungen in der That genügend ist, so machen wir die folgenden Voraussetzungen:

1. Alle den Balken belastenden Kräfte, welche dem Begriff der relativen Elasticität gemäss seine Axe rechtwinkelig schneiden müssen, seien parallel, so dass sie folglich auch in einer Ebene liegen. Wenn auch der allgemeinere Fall, dass die Kräfte nicht alle parallel sind, bei den technischen Constructionen nicht gerade selten ist, so sind doch gewöhnlich die in einer gewissen Richtung wirkenden Kräfte in dem Maasse vorherrschend, dass man die übrigen entweder ganz vernachlässigen oder ihren geringen Einfluss schätzungsweise in Anschlag bringen darf.

2. Die Ebene der äusseren Kräfte sei Symmetrieebene des Balkens. (Symmetrieebene eines Körpers heisst eine Ebene von der Eigenschaft, dass jedes Loth, welches von irgend einem Punkte A des Körpers auf jene Ebene gefällt und über seinen Fusspunkt N hinaus um ein Stück $NA' = AN$ verlängert wird, in einem Punkte A' des Körpers endigt.) Ferner nehmen wir an:

3. dass der geometrische Ort aller materiellen Punkte, die ursprünglich in einem Querschnitt des Balkens sich befanden, auch noch bei seiner Biegung ein Querschnitt desselben, d. h. eine zur elastischen Linie senkrechte Ebene bleibt. Diese Annahme kommt der Wirklichkeit um so näher, je kleiner die parallel mit der Kraft- oder Symmetrieebene gemessene grösste Querschnittsdimension (die Dicke) des Balkens im Verhältniss zu seiner Länge, und je geringer die Biegung ist, in Betreff welcher wir stets voraussetzen:

4. dass die Entfernung jedes Punktes der Axe von seinem Orte vor der Biegung sehr klein sei im Verhältniss zu seinem Abstand von einem stets vorhandenen oder als solcher vorauszusetzenden fixen Punkt der Axe. Diese Voraussetzung, welche sich bei den Constructionen, deren einzelne Theile eine möglichst unwandelbare Form haben müssen, stets erfüllt findet, ist übrigens an den Umstand geknüpft, dass die Dicke des Balkens, die wir zwar im Verhältniss zur Länge desselben als möglichst klein angenommen haben, doch andererseits an und für sich genommen nicht unter eine gewisse Grenze hinabgehe; denn je dünner ein Stab von beliebiger Länge ist, eine um so grössere Biegung kann er für jede Längeneinheit ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze erleiden. — Endlich nehmen wir an:

5. dass die absoluten oder rückwirkenden Spannungen und sonstigen Wirkungen (Verschiebungen), welche etwa der Quere nach in dem Balken hervorgerufen werden könnten, gegen die allein zu berücksichtigenden Spannungen der Längenfasern vernachlässigt werden dürfen. Diese Annahme ist ebenso wie die dritte um so mehr zulässig, je grösser die Länge des Balkens im Verhältniss zur Dicke ist; bei kurzen und dicken Prismen würde sie aber wesentlich fehlerhaft sein.

Aus der ersten und zweiten Voraussetzung geht unzweifelhaft hervor, dass die elastische Linie eine Curve von einfacher Krümmung ist und in der Ebene der Kräfte liegt. In der That ist kein Grund denkbar, weshalb ein materieller Punkt des stets als homogen vorausgesetzten Körpers, der ursprünglich in der gemeinschaftlichen Kraft- und Symmetrieebene sich befand, aus dieser unabhängig vom Körper fixirt gedachten Ebene eher nach der einen als nach der andern Seite hin heraustreten sollte; also muss man schliessen, dass alle jene Punkte in dieser Ebene bleiben, somit auch die materiellen Punkte der Axe. Wollte man die Voraussetzung der Symmetrie des Balkens in Bezug auf die Ebene der Kräfte aufgeben, so würde wegen der als sehr gering vorausgesetzten Biegung die elastische Linie zwar auch, wenigstens näherungsweise, als ebene Curve erkannt werden; allein ihre Ebene würde im Allgemeinen nicht mit der Ebene der Kräfte zusammenfallen, sondern gegen dieselbe unter einem Winkel geneigt sein, der augenscheinlich von der Form des Querschnitts und von dessen Lage gegen die Kraftebene abhängig ist. Jedermann weiss z. B., dass ein gerader Blechstreifen, wenn er der Länge nach horizontal, der Breite nach geneigt liegend, an einem Ende eingeklemmt, am andern durch ein angehängtes Gewicht beschwert wird, nicht blos nach unten, sondern auch zur Seite gebogen wird, und zwar Letzteres mehr oder weniger je nach der Neigung des Blechstreifens und je nach dem Verhältniss seiner Breite zu seiner Dicke.

Mit der Verlängerung der Fasern an der convexen und ihrer Verkürzung an der concaven Seite des gebogenen Balkens ist streng genommen eine Zusammenziehung des Querschnitts an jener und eine Erweiterung desselben an dieser Seite verbunden, wodurch auch sein Schwerpunkt nach dieser (der concaven) Seite hin gerückt wird; von dieser sehr unbedeutenden Formänderung dürfen wir aber ohne in Betracht kommenden Fehler abstrahiren und somit auch die elastische Linie beständig als den geometrischen Ort der

Schwerpunkte aller auf ihr senkrechten Querschnitte des Balkens betrachten.

Das zwischen irgend zwei unendlich nahen Normalebenen N und N' der elastischen Linie enthaltene Element des gebogenen Balkens kann der Form nach entstanden gedacht werden durch Umdrehung des der letzten Bemerkung zufolge unveränderlichen Querschnitts um die Durchschnittslinie XY jener Normalebenen als Umdrehungsaxe. Alle zwischen den Ebenen N und N' enthaltenen Längenfaserelemente hatten der dritten Voraussetzung zufolge ursprünglich gleiche Länge, nach der Biegung sind nur noch diejenigen gleich lang, welche gleichen Abstand von der Linie XY haben. Alle solche von XY gleich weit entfernte Faserelemente erfahren also auch bei der Biegung des Balkens eine gleich grosse totale und specifische Ausdehnung oder Verkürzung, oder die letztere ist gleich für alle Punkte einer mit XY parallelen geraden Linie des Querschnitts, in welchem der Balken von der Ebene N geschnitten wird. Weil nun aber die gerade Linie XY auf der Ebene der elastischen Linie, also auf der Ebene der Kräfte senkrecht ist, so kann man sagen, dass in allen Punkten einer auf der Kraftebene senkrechten geraden Linie eines jeden Querschnitts die specifische Ausdehnung oder Verkürzung gleich ist.

Der geometrische Ort aller Punkte eines Querschnitts, in welchen die specifische Ausdehnung $= 0$ ist, ist also auch eine auf der Kraftebene senkrechte gerade Linie; man nennt sie die neutrale Axe des Querschnitts. Die neutrale Faserschicht ist eine cylindrische Fläche; denn sie ist der geometrische Ort der neutralen Axen aller Querschnitte.

Der fünften Voraussetzung zufolge reducirt sich die gemäss §. 1 durch die Dimensionen des Balkens bei gegebener Belastung oder durch die Belastung bei gegebenen Dimensionen zu erfüllende Bedingung hier darauf, dass an irgend einer Stelle die specifische absolute Spannung einer Längenfaser höchstens einem gewissen Grenzwerthe k', die specifische rückwirkende Spannung höchstens einem gewissen Grenzwerthe k'' gleich sein soll. Um dieser Bedingung Genüge leisten zu können, muss zunächst die Abhängigkeit der in einem Punkte eines Querschnitts hervorgerufenen Spannung von der Lage dieses Punktes in diesem Querschnitt und von der Lage dieses Querschnitts im Körper ermittelt werden, woraus sich demnächst der Ort des sogenannten gefährlichen Punktes ergiebt, d. h. desjenigen Punktes, in welchem einer der Grenzwerthe k' und k'' am ehesten durch die specifische absolute oder rückwirkende Spannung einer Faser erreicht wird. Der zu erfüllenden Grundbedingung wird nun dadurch entsprochen, dass die dem gefährlichen Punkte entsprechende specifische Spannung, als Function der Dimensionen des Balkens und seiner Belastung ausgedrückt, entweder $= k'$ oder $= k''$ gesetzt (je nachdem jene Spannung eine absolute oder rückwirkende ist) und aus der erhaltenen Gleichung eine unbestimmt gelassene Dimension oder Kraft eliminirt wird. — Denjenigen Querschnitt, in welchem der gefährliche Punkt liegt, werden wir des kürzeren Ausdrucks wegen in Zukunft den Bruchquerschnitt, dessen Schwerpunkt oder Durchschnittspunkt mit der elastischen Linie den Bruchpunkt nennen.

Wenn man die Unterstützungen des Balkens durch äquivalente, d. h. solche Kräfte ersetzt denkt, welche den auf sie ausgeübten Pressungen gleich

und entgegengesetzt sind, so sind dieselben inbegriffen, wenn von den äusseren oder den Balken belastenden Kräften gesprochen wird; es wird also auch von ihnen vorausgesetzt, dass sie mit den unmittelbar gegebenen äusseren Kräften in einer Ebene liegen und die elastische Linie senkrecht oder fast senkrecht schneiden. (Die besonderen Umstände, welche eintreten, wenn der Balken nicht blos einfach gestützt, sondern eingeklemmt ist, mögen hier einstweilen dahingestellt bleiben.) Wenn man den auf solche Weise auf ein im Gleichgewicht befindliches freies System zurückgeführten Balken in irgend einem Querschnitt durchgeschnitten denkt, so sind die in den sämmtlichen Flächenelementen dieses Querschnitts vor der Zerschneidung vorhanden gewesenen Spannungen der Bedingung unterworfen, dass sie den einen oder den andern Balkentheil als freies und festes System bei unveränderter Form und überhaupt in unverändertem Zustand im Gleichgewicht erhalten müssen, falls sie nur in den Elementen der durch die Zerschneidung entstandenen Endfläche des betreffenden Balkentheils in dem einen oder dem andern Sinne als äussere Kräfte wirksam gedacht werden. Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem Begriff von „Spannung". Die Bedingungsgleichungen für das Vorhandensein dieses Gleichgewichts lehren nun mit Rücksicht auf die obigen Voraussetzungen 1—5 und die daraus gezogenen Folgerungen zunächst, dass die neutrale Axe jedes Querschnitts durch seinen Schwerpunkt geht. Ferner findet man, wenn

- I das Trägheitsmoment eines Querschnitts in Bezug auf seine neutrale Axe, d.h. die Summe der Producte aus den Inhalten aller unendlich kleinen Flächenelemente des Querschnitts in die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Axe,
- M die absolut genommene algebraische Summe der Momente aller auf den betrachteten Balkentheil wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die neutrale Axe des betrachteten beliebigen Querschnitts,
- σ die positive oder negative (absolute oder rückwirkende) specifische Spannung in einem Punkte dieses Querschnitts bedeutet, für welchen
- η die entsprechende positive oder negative Ordinate in Bezug auf die neutrale Axe als Abscissenaxe ist,

dass diese specifische Spannung σ sich ausdrückt durch:

$$\sigma = \frac{M \cdot \eta}{I} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1).$$

Durch diese Gleichung ist die Abhängigkeit der Spannung σ sowohl von dem Ort des betreffenden Punktes im Querschnitt, als von der Lage dieses Querschnitts im Balken ausgedrückt. Wenn man von dem letzteren, falls seine elastische Linie Inflexionspunkte, d. h. solche Punkte enthalten sollte, wo der Sinn der Biegung sich ändert, nur ein solches Stück ins Auge fasst, für welches der Sinn der Biegung derselbe ist, so ist der den gefährlichen Punkt enthaltende oder Bruchquerschnitt offenbar derjenige, für welchen M am grössten ist. Bezeichnet ferner

- e' den grössten Abstand eines nach der convexen Seite hin gelegenen Punktes des Bruchquerschnitts von dessen neutraler Axe,
- e'' den grössten Abstand eines nach der concaven Seite hin gelegenen Punktes von derselben,

so ist der gefährliche Punkt entweder derjenige Punkt des Bruchquerschnitts,

für welchen $\eta = e'$, oder derjenige, für welchen $\eta = -e''$ ist. Die zu erfüllende Bedingung wird also, unter M' den Maximalwerth von M verstanden, durch eine der beiden Gleichungen

$$k' = \frac{e' \cdot M'}{I}; \quad k'' = \frac{e'' \cdot M'}{I} \quad \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

ausgedrückt, und zwar offenbar durch die erste oder durch die zweite, je nachdem der ersten oder der zweiten bei gegebenen Dimensionen des Balkens der kleinere Werth von M' entspricht, je nachdem also

$$\frac{k'}{e'} \lesseqgtr \frac{k''}{e''}$$

ist. Im ersten Falle ist der gefährliche Punkt derjenige, für welchen $\eta = e'$, im zweiten Falle derjenige, für welchen $\eta = -e''$ ist. Im ersten Falle ist der beginnende Bruch durch Zerreissung der äussersten Faser an der convexen, im zweiten Falle durch Zerdrückung der äussersten Faser an der concaven Seite zu befürchten. — Hat die elastische Linie Inflexionspunkte, so muss man unter den relativ gefährlichen Punkten der einzelnen Theile des Balkens, welche durch die den Inflexionspunkten entsprechenden Querschnitte von einander getrennt werden, den absolut gefährlichen oder gefährlichsten Punkt auswählen und dessen Spannung $= k'$ oder k'' setzen.

Zur Vereinfachung der Untersuchung pflegt man gewöhnlich $k' = k'' =$ einem mittleren Werthe k zu setzen, obgleich für manche Materialien, z. B. für Holz und namentlich für Gusseisen, mit geringem Rechte, wie eine Vergleichung der Werthe von k in §. 3 und §. 6 erkennen lässt. Bei dieser Annahme muss unabhängig von dem Sinn der Biegung derjenige Querschnitt, in Bezug auf dessen neutrale Axe M am grössten ist, als der Bruchquerschnitt, und derjenige Punkt des Bruchquerschnitts als der gefährliche Punkt angesehen werden, welcher, sei es auf der einen oder auf der andern Seite, von der neutralen Axe am weitesten entfernt ist, für welchen also η absolut genommen dem grösseren der beiden Abstände e' und e'' gleich ist. Bezeichnet man diesen grössten Abstand mit e, so ist die Bedingungsgleichung dafür, dass die specifische, gleichviel ob absolute oder rückwirkende Spannung in jenem gefährlichen Punkte $= k$ ist, die folgende:

$$k = \frac{e \cdot M'}{I} \quad \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad 3).$$

Wenn die Dimensionen oder die Belastung eines Balkens der Hauptbedingung gemäss bestimmt worden sind, dass er vermöge seiner Elasticität einen hinlänglichen Widerstand darbietet, um auch bei etwaigen unvermeidlichen Unregelmässigkeiten eine bleibende Formänderung nicht befürchten zu müssen, so ist es ausserdem in manchen Fällen nöthig, *a priori* die temporäre **Durchbiegung** berechnen zu können, welche er in einem beliebigen Punkte erleiden wird, d. h. die Entfernung irgend eines Punktes der elastischen Linie von der geraden Axe des ungebogenen Balkens. Diese Berechnung geschieht vermittelst der Gleichung

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M \quad \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad 4),$$

worin

E den Elasticitätsmodulus des Materials in der Richtung der Längenfasern,
ρ den Krümmungsradius der elastischen Linie

bedeutet. In den folgenden Paragraphen wird an einzelnen Beispielen gezeigt werden, wie aus dieser Gleichung auf Grund der obigen vierten Voraussetzung eine angenäherte Gleichung der elastischen Linie und somit ein angenäherter Werth der Durchbiegung für jeden Punkt derselben abgeleitet werden kann.

Die linke Seite der Gleichung 4) ist die absolut genommene algebraische Summe der Momente der in einem Querschnitt hervorgerufenen Spannungen der Längenfasern in Bezug auf die neutrale Axe dieses Querschnitts; diese Grösse soll schlechtweg das **Spannungsmoment des Querschnitts** genannt werden. Der höchstens zulässige Werth dieses Spannungsmoments, nämlich die Grösse $k \cdot \frac{I}{e}$, oder besser die kleinere der beiden Grössen $k' \cdot \frac{I}{e'}$ und $k'' \cdot \frac{I}{e''}$, soll das der betreffenden Lage der Kraftebene entsprechende **Widerstandsmoment des Balkens** genannt und mit W bezeichnet werden, wonach die Erfüllung der Grundbedingung auf diejenige der Gleichung

$$W = M' \qquad 5)$$

hinausläuft. Wenn man nicht $k' = k''$ setzt, so muss man bei derselben Lage der Kraftebene den beiden entgegengesetzten Biegungsrichtungen entsprechend zwei verschiedene Widerstandsmomente W desselben Balkens unterscheiden, welche nur dann einander gleich sein würden, wenn $e' = e''$ wäre; denn bei umgekehrter Biegungsrichtung sind auch die Werthe von e' und e'' die umgekehrten.

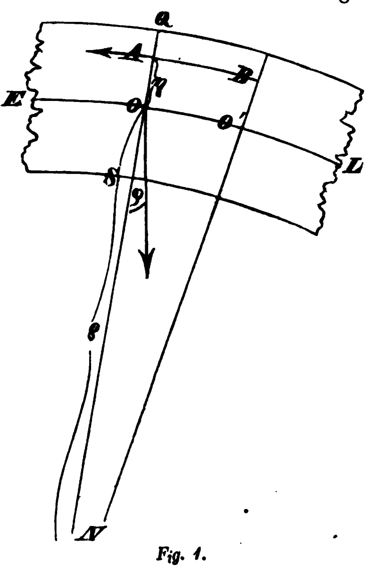


Fig. 1.

Wir haben nur die Gleichungen 1) und 4) herzuleiten, da die aus der ersteren gezogenen Folgerungen einer Rechtfertigung nicht bedürfen. Zu dem Ende stelle *Fig. 1* den Durchschnitt eines Stücks des gebogenen Balkens mit der Kraftebene vor, EL die elastische Linie. ON und $O'N$ seien die Normalen der elastischen Linie für die beiden unendlich nahen Punkte O und O' derselben; sie schneiden sich in dem entsprechenden Krümmungsmittelpunkt N. Die Normalen ON und $O'N$ kann man zugleich als die Projectionen der bezüglichen Normalebenen, den Punkt N als die Projection ihrer Durchschnittslinie auf die Ebene der Figur betrachten.

Der dem Punkte O der elastischen Linie entsprechende Querschnitt des Balkens, welcher in der geraden Linie QS von der Kraftebene geschnitten wird, werde durch gerade Linien, welche mit seiner neutralen Axe parallel, also zu QS senkrecht sind, in unendlich schmale Streifen zerlegt gedacht, deren Inhalte mit dq bezeichnet sein mögen, während q den Inhalt des ganzen Querschnitts bedeutet. Indem die Lage der neutralen Axe noch nicht bekannt ist, werde unter η einstweilen der positive oder negative Abstand eines solchen Flächenstreifens von der geraden Linie OZ verstanden, die durch den Punkt O mit der neutralen Axe parallel läuft, wobei ein positiver Werth von η einem solchen Flächenstreifen entsprechen soll,

der nach der convexen, ein negativer einem solchen, der nach der concaven Seite des gebogenen Balkens hin gelegen ist. Wegen der Gleichheit der in der Richtung der Fasern stattfindenden specifischen Spannung σ in allen Punkten eines solchen Flächenstreifens ist seine totale Spannung $= \sigma . dq$, und sie kann als eine im Mittelpunkt A des betreffenden Streifens, der wegen der Symmetrie des Balkens ein Punkt von QS ist, angreifende einzelne Kraft gedacht werden, falls es sich darum handelt, diese Spannungen der Bedingung gemäss zu bestimmen, dass sie, als äussere Kräfte betrachtet, den einen oder den andern der beiden durch den Querschnitt getrennten Balkenstücke, etwa das Stück QSL, als ein frei bewegliches festes System im Gleichgewicht erhalten müssen. Dabei muss diese im Punkt A angreifende Kraft nach auswärts (wie es der Pfeil in der Figur andeutet) oder nach einwärts gerichtet gedacht werden, je nachdem σ eine positive (absolute) oder negative (rückwirkende) Spannung bedeutet.

Jede von den in den Punkten der geraden Linie QS angreifenden parallelen Kräften $\sigma . dq$ möge auf den Punkt O übertragen, d. h. durch eine gleiche und gleichgerichtete in O angreifende Kraft und durch ein Kräftepaar ersetzt werden, dessen Moment mit Berücksichtigung des Sinnes der Drehung $= \sigma . dq . \eta$ ist. Alle übertragenen Kräfte lassen sich zu einer in die Tangente der elastischen Linie fallende Resultante

$$= \int \sigma . dq$$

und zu einem resultirenden Paare zusammensetzen, dessen Ebene mit der Ebene der Figur, d. h. der Kraftebene, parallel ist, und dessen Moment mit Rücksicht auf den Sinn der Drehung

$$= \int \sigma . dq . \eta$$

ist. Ein positiver Werth dieses Moments entspricht einer Drehungsrichtung, die für einen Beschauer der *Fig. 1* der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Diese Drehungsrichtung ist offenbar diejenige, welche das resultirende Paar haben muss, so dass obige letztere algebraische Summe jedenfalls positiv, also zugleich der absolute Werth des Moments ist.

Betrachten wir andererseits die parallelen äusseren Kräfte, welche (mit Berücksichtigung der für die etwa vorhandenen Unterstützungen substituirten) in der Ebene der Figur auf den Balkentheil QSL wirken; denken wir auch sie sämmtlich auf den Punkt O übertragen, hier zu einer Resultanten R zusammengesetzt, und die bei der Uebertragung hinzugetretenen Kräftepaare zu einem resultirenden Paar, dessen Moment den Absolutwerth M haben mag. Für einen Beschauer der *Fig. 1* muss dieses Paar offenbar im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers drehen.

Nun müssen mit Rücksicht auf die vernachlässigten Spannungen, welche in die Ebene des Querschnitts fallen, die Kräfte $\int \sigma . dq$ und R, sowie die entgegengesetzten Paare, deren Momente absolut genommen $= \int \sigma . dq . \eta$ und $= M$ sind, mit einander im Gleichgewicht sein. Denkt man R in zwei Componenten zerlegt, wovon die eine in die Normale ON, die andere in die Tangente fällt, so muss erstere, welche in dem gebogenen Balken eine Verschiebung längs des Querschnitts verursacht, mit den in die Ebene dieses Querschnitts fallenden, die in Wirksamkeit gerufene Schubelasticität darstellenden Spannungen für sich allein im Gleichgewicht sein; sie kommt deshalb in Gemässheit der fünften Voraussetzung nicht in Betracht. Die andere Componente, welche mit der Kraft $\int \sigma . dq$ im Gleichgewicht sein müsste,

darf aber aus einem andern Grunde auch vernachlässigt werden, weil nämlich der Winkel φ, den die Kraft R mit der Normalen ON bildet, und welcher der Neigung der elastischen Linie im Punkte O gegen die ursprünglich gerade Axe des Balkens gleich ist, der vierten Voraussetzung zufolge sehr spitz ist. Sonach reduciren sich die Gleichgewichtsbedingungen auf folgende zwei:

$$\int \sigma \, . \, dq = 0; \quad \int \sigma \, . \, dq \, . \, \eta = M \Big\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{a).}$$

Die nach der dritten Voraussetzung ursprünglich gleiche Länge der zwischen den Normalebenen für die Punkte O und O' der elastischen Linie enthaltenen Faserelemente sei $= ds$, die specifische positive oder negative Ausdehnung in einem Punkte A im Abstande η von OZ sei $= \lambda$, diejenige in einem Punkte von OZ selbst $= \lambda_0$. Dann ist die Länge des dem ersteren Punkte entsprechenden Faserelements $AB = ds\,(1 + \lambda)$, diejenige des dem letzteren entsprechenden Faserelements $OO' = ds\,(1 + \lambda_0)$; und weil diese beiden Faserelemente als Kreisbögen mit gleichen Mittelpunktswinkeln und den Radien $\rho + \eta$ und ρ betrachtet werden können, so verhält sich:

$$ds\,(1 + \lambda) : ds\,(1 + \lambda_0) = \rho + \eta : \rho,$$

woraus

$$\lambda = (1 + \lambda_0)\left(1 + \frac{\eta}{\rho}\right) - 1 = \lambda_0 + (1 + \lambda_0)\frac{\eta}{\rho} \Big\} \quad . \; . \; . \; \text{b).}$$

Nach der Definition des Elasticitätsmodulus E in der Richtung der Fasern ist aber

$$\sigma = E \, . \, \lambda = E \, . \left[\lambda_0 + (1 + \lambda_0)\frac{\eta}{\rho}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{c),}$$

und wenn man diesen Ausdruck für σ in der ersten der Gleichungen a) substituirt, so findet man mit Rücksicht darauf, dass OZ den Schwerpunkt des Querschnitts enthält, dass also $\int dq \, . \, \eta = 0$ ist,

$$E \, . \, \lambda_0 \, . \int dq + \frac{E(1 + \lambda_0)}{\rho} \, . \int dq \, . \, \eta = E \, . \, \lambda_0 \, . \, q = 0,$$

woraus folgt, dass $\lambda_0 = 0$, folglich OZ die neutrale Axe selbst sein muss. Hiernach vereinfachen sich die Ausdrücke b) und c) von λ und σ in:

$$\lambda = \frac{\eta}{\rho}; \quad \sigma = \frac{E\eta}{\rho} \Big\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{d)}$$

und die zweite der Gleichungen a) geht über in:

$$\frac{E}{\rho} \, . \int dq \, . \, \eta^2 = \frac{E \, . \, I}{\rho} = M,$$

welches die obige Gleichung 4) ist. Setzt man in derselben der zweiten der Gleichungen d) zufolge:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{\eta},$$

so verwandelt sie sich in die obige Gleichung 1).

Die Benutzung der Gleichungen dieses Paragraphen zur Berechnung der Tragfähigkeit und Biegung von Balken setzt die Kenntniss der Grössen I und e als Functionen der Querschnittsdimensionen voraus. Wir lassen ihre Ausdrücke für einige der gewöhnlichsten Querschnittsformen folgen; die beigezeichneten Figuren zeigen die Lage der durch einen Querstrich angedeuteten neutralen Axe.

Gestalt des Querschnitts und Lage der neutralen Axe	I	e	$\frac{I}{e}$
1. Rechteck	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{6}$
2. Reguläres Polygon in beliebiger Lage gegen die neutrale Axe. (Inhalt $= F$, Seite $= s$, Radius des umbeschriebenen Kreises $= r$)	$\frac{F}{12}\left(3r^2 - \frac{s^2}{2}\right)$		
3. Kreis (Radius $= r$)	$\frac{\pi r^4}{4}$	r	$\frac{\pi r^3}{4}$
4. Ellipse	$\frac{\pi \cdot ab^3}{4}$	b	$\frac{\pi \cdot ab^2}{4}$
5. Ring (äusserer Radius $= R$, innerer $= r$)	$\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$	R	$\frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$
6. Doppelt-rechteckiger Querschnitt	$\frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$\frac{H}{2}$	$\frac{b(H^3 - h^3)}{6H}$
7. Hohler rechteckiger und doppelt-*T*förmiger Querschnitt	$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{H}{2}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
8. Kreuzförmiger Querschnitt	$\frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$\frac{H}{2}$	$\frac{BH^3 + bh^3}{6H}$
9. *T*förmiger Querschnitt	$\frac{(BH^2 - bh^2)^2 - 4BHbh(H-h)^2}{12(BH - bh)}$	$\frac{BH^2 - bh^2}{2(BH - bh)}$	$\frac{(BH^2 - bh^2)^2 - 4BHbh(H-h)^2}{6(BH^2 - bh^2)}$

Die Herleitung dieser Ausdrücke bietet keine Schwierigkeit dar. Was zunächst das Rechteck betrifft, so denke man dasselbe durch gerade Linien, welche mit den Seiten b parallel sind, in unendlich schmale Streifen von der Breite dx zerlegt; ist x der Abstand eines beliebigen solchen Streifens von einer der Seiten b, so ist das Trägheitsmoment I' des Rechtecks in Bezug auf diese Seite:

$$I' = \int_0^h b \,.\, dx \,.\, x^2 = \frac{b h^3}{3} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{e)},$$

folglich

$$I = 2 \cdot \frac{b \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} = \frac{b h^3}{12}.$$

Aus den auf das Rechteck bezüglichen Ausdrücken ergeben sich sofort diejenigen für die sub 6—8 aufgeführten Formen. Zur Entwickelung der Ausdrücke sub 9 hat man den Satz zu benutzen, dass das Trägheitsmoment I' einer beliebigen ebenen Fläche F in Bezug auf eine beliebige in ihrer Ebene liegende gerade Linie $A'X'$

$$I' = I + F \,.\, d^2 \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{f)}$$

ist, falls I das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die durch ihren Schwerpunkt mit $A'X'$ parallel laufende gerade Linie AX und d den Abstand beider geraden Linien bedeutet. In der That, es ist, unter x den positiven oder negativen Abstand eines Flächenelements dF von AX verstanden,

$$I' = \int (x + d)^2 \,.\, dF = \int x^2 \,.\, dF + 2d \int x \,.\, dF + d^2 . \int dF$$
$$= I + F \,.\, d^2.$$

Die Ausdrücke sub 3—5 ergeben sich leicht aus dem Trägheitsmoment des regulären Polygons sub 2. Um dieses zu finden, mag zunächst bemerkt werden, dass das Trägheitsmoment I' eines Dreiecks in Bezug auf seine Grundlinie b, falls h die Höhe und x den Abstand der Grundlinie von einem beliebigen mit ihr parallelen Flächenstreifen bedeutet,

$$I' = \int_0^h \frac{h - x}{h} \cdot b \,.\, dx \,.\, x^2 = \frac{b}{h}\left(h \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{b h^3}{12} \Big\} \quad \ldots \quad \text{g)}$$

ist. — Nun sei AB (*Fig.* 2) eine beliebige Seite $= s$ des regulären Polygons, von der zunächst angenommen werden mag, dass sie weder die neutrale Axe OX, noch die darauf senkrechte Axe OY schneidet. Das Trägheitsmoment des Polygons in Bezug auf OX ist die Summe der Trägheitsmomente sämmtlicher congruenten Dreiecke wie AOB, worin das Polygon zerlegt werden kann. Das Trägheitsmoment $I_{\prime}$ dieses Dreiecks AOB ist gleich der Differenz derjenigen der beiden Dreiecke AOD und BOD, also

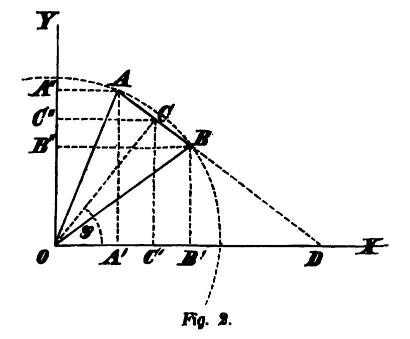


Fig. 2.

$$I_{\prime} = \frac{OD}{12}\left(\overline{AA'}^3 - \overline{BB'}^3\right),$$

oder weil, wenn der Radius OC des einbeschriebenen Kreises $= a$, der Winkel $COX = \varphi$ gesetzt wird,

$$OD = \frac{a}{\cos\varphi}$$

$$AA' = a \, . \, \sin\varphi + \frac{s}{2} \cdot \cos\varphi$$

$$BB' = a \, . \, \sin\varphi - \frac{s}{2} \cdot \cos\varphi$$

ist,

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot \left(3a^2 s \, . \, \sin\varphi^2 + \frac{a s^3}{4} \cdot \cos\varphi^2\right),$$

oder auch, wenn

$$a \, . \, \sin\varphi = CC' = y; \quad a \, . \, \cos\varphi = CC'' = x$$
$$s \, . \, \sin\varphi = A'B' = s'; \quad s \, . \, \cos\varphi = A''B'' = s''$$

gesetzt wird,

$$I_1 = \frac{1}{12}\left(3a^2 \, . \, ys' + \frac{s^2}{4} \cdot xs''\right),$$

mithin

$$I = I_1 + I_2 + \ldots = \frac{1}{12} \cdot \left[3a^2 \, . \, \Sigma(ys') + \frac{s^2}{4} \cdot \Sigma(xs'')\right].$$

Indem sich endlich leicht nachweisen lässt, dass für jede beliebige Seitenzahl des regulären Polygons und für jede beliebige Lage desselben gegen die neutrale Axe OX

$$\Sigma(ys') = \Sigma(xs'') = F$$

ist, so folgt:

$$I = \frac{F}{12}\left(3a^2 + \frac{s^2}{4}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \text{h}),$$

oder auch, da $a^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$ ist,

$$I = \frac{F}{12}\left(3r^2 - \frac{s^2}{2}\right),$$

wie oben angegeben. Wenn auch die in diesem Paragraphen entwickelte Theorie an die Voraussetzung gebunden ist, dass der Querschnitt überhaupt, also hier das reguläre Polygon, von der zur neutralen Axe senkrechten Axe OY symmetrisch getheilt wird, so ist man jedoch bei polygonalen rotirenden Wellen, wobei der Werth von e beständig zwischen den Grenzen a und r schwankt, genöthigt, von diesem Einfluss der Lage zu abstrahiren und ein- für allemal die ungünstigste vorauszusetzen, welcher $e = r$ entspricht.

Die Ausdrücke von $\frac{I}{e}$ sub 1 und 4 der obigen Tabelle lehren, dass die Widerstandsmomente $W = k \cdot \frac{I}{e}$ rechteckiger und elliptischer Balken bei gleichem Aufwand an Material, also bei gleichem Querschnitt $q = bh$ oder $q = \pi \, . \, ab$, den Höhen h, respective $2b$ proportional wachsen. Weil aber bei Beibehaltung dieser einfachen Querschnittsformen die über eine gewisse Grenze hinaus getriebene Vergrösserung der Höhe die nöthige Widerstands-

fähigkeit gegen einen zufälligen Seitendruck zu sehr vermindern würde, so ist es vortheilhaft, falls das Material und die sonstigen Umstände es zulassen, nöthigenfalls durch Zusammensetzung des Balkens aus mehreren Theilen, eine der Querschnittsformen 5 — 9 herzustellen, welche das Widerstandsmoment für die Hauptbiegung vergrössern, ohne es für eine zufällige Seitenbiegung zu vermindern.

Bei Hölzern ist man in dieser Beziehung durch das natürliche Vorkommen mehr beschränkt als bei Metallen, und es ist hier die Aufgabe bemerkenswerth, aus einem runden Stamme einen Balken von rechteckigem Querschnitt so zu schlagen, dass er, falls die breiteren Flächen mit der Kraftebene parallel sind, an und für sich (ohne Verbindung mit andern Balken) das grösstmögliche Widerstandsmoment hat. Der rechteckige Querschnitt dieses Balkens ist dadurch bestimmt, dass seine Diagonale dem Durchmesser des kreisförmigen Querschnitts des gegebenen Stammes und die Projection seiner kleineren Seite auf die Diagonale dem dritten Theil der letzteren gleich sein muss. Erstere Bedingung bedarf keines Beweises; was letztere betrifft, so sei die Diagonale des Rechtecks (der Durchmesser des Kreises) $= 1$, die kleinere Seite $= x$, also die grössere $= \sqrt{1 - x^2}$. Dann muss derjenige Werth von x, für welchen

$$\frac{I}{e} = \frac{1}{6} \cdot x(1 - x^2)$$

ein Maximum sein soll, der Gleichung

$$1 - 3x^2 = 0$$

entsprechen, oder der Proportion:

$$1 : x = x : \frac{1}{3},$$

was mit der oben ausgesprochenen Bedingung übereinstimmt.

Wenn man auf die Verschiedenheit der zulässigen Grenzwerthe k' und k'' der specifischen absoluten und rückwirkenden Spannung, welche für die wichtigsten Materialien in §. 3 und §. 6 angeführt worden sind, Rücksicht nimmt, so ist es natürlich am vortheilhaftesten, dem Querschnitt eine solche Gestalt und Lage in Bezug auf die Kraftebene und den Sinn der Biegung zu geben, dass im Bruchquerschnitt die specifischen Spannungen der äussersten ausgedehnten und verkürzten Fasern gleichzeitig ihre respectiven Grenzwerthe k' und k'' erreichen, weil in diesem Falle die Widerstandsfähigkeit des Materials gegen Ausdehnung und Zusammendrückung zugleich am vollständigsten benutzt wird. Dies ist aber dann der Fall, wenn

$$\left.\frac{k'}{e'} = \frac{k''}{e''} \quad \text{oder} \quad \frac{e'}{e''} = \frac{k'}{k''}\right\} \qquad \text{i)}$$

ist, also z. B. für Schmiedeeisen:

$$\frac{e'}{e''} = \frac{650}{650} = 1$$

für Gusseisen:

$$\frac{e'}{e''} = \frac{250}{1500} = \frac{1}{6}$$

für Holz:

$$\frac{e'}{e''} = \frac{80}{40} = 2$$

Um die vortheilhafteste Vertheilung der Masse nach oben und unten bei einem gusseisernen Balken zu ermitteln, nahm Hodgkinson solche von doppelt *T*förmigem Querschnitte (siehe oben Nr. 7), wobei die Masse der unteren zu derjenigen der oberen Flansche in einem verschiedenen von 1 : 1 bis 6 : 1 steigenden Verhältnisse stand, und belastete sie in der Mitte, während beide Enden auf Stützen lagen. Erst bei dem letzten Verhältnisse erfolgte der Bruch bei übermässiger Belastung infolge des Zerreissens der unteren und des Zerdrücktwerdens der oberen Flansche zugleich, während er bis dahin blos infolge des Zerreissens der unteren eingetreten, die rückwirkende Festigkeit der oberen also nicht vollständig genutzt worden war. Bei dieser vortheilhaftesten Form des Querschnitts war in der That nahezu $e' : e'' = \frac{1}{6}$. — Nach Versuchen von Fairbairn mit der Modellröhre der aus Eisenblech construirten Conway-Röhrenbrücke, deren Grundform der hohle rechteckige Balken ist (siehe oben Nr. 7), war dieses vortheilhafteste Verhältniss der Masse des Bodens zu derjenigen der oberen Wand nicht genau = 1, sondern ungefähr = 4 : 5.

Wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, auf die Verschiedenheit der zulässigen absoluten und rückwirkenden Spannung keine Rücksicht nehmend, die Formel 3) zu Grunde legt, so pflegt man für *k* einen solchen mittleren Werth anzunehmen, wie für die drei wichtigsten Materialien von Balken die folgende Zusammenstellung ungefähr ihn angiebt.

Material	k'	k''	k
Schmiedeeisen . . .	650	650	650
Gusseisen	250	1500	500
Holz	80	40	60

Dieses Verfahren kann natürlich, wenn die absolute und rückwirkende Festigkeit sehr verschieden sind, auf Genauigkeit nicht Anspruch machen. Ihm zufolge würde z. B. die Tragfähigkeit des oben erwähnten vortheilhaftesten gusseisernen Probebalkens von Hodgkinson die nämliche bleiben, wenn man ihn umkehrt, während sie in Wirklichkeit etwa sechs Mal kleiner wird.

Galilei war der Erste, welcher eine Theorie der relativen Festigkeit veröffentlicht hat. Indem er dieselbe blos auf die absolute Festigkeit zurückführte, legte er die neutrale Axe oder vielmehr die Drehaxe, um welche im Falle des in einem Querschnitte eintretenden Bruchs der abbrechende Theil des Balkens sich drehen sollte, durch den tiefsten Punkt des Bruchquerschnitts; ausserdem setzte er den Widerstand in allen Punkten desselben als gleich voraus, nämlich gleich der absoluten Festigkeit, indem er sich vorstellte, dass die Trennung in allen Punkten in demselben Augenblicke erfolge. Leibnitz und Mariotte behielten dieselbe Lage der Drehaxe bei, setzten aber den Widerstand in jedem Flächenelemente des Querschnitts seiner Entfernung von jener Axe proportional voraus, wodurch diese erst eine eigentliche neutrale Axe wurde. Jak. Bernoulli wies nach, dass der Widerstand gegen Zerdrücken eben sowohl wie derjenige gegen Zerreissen in Betracht kommen müsse, und verlegte demgemäss die neutrale Axe in die Mitte des Querschnitts. Ihre Vollendung erhielt diese Theorie, wie diejenige der Festigkeit überhaupt, endlich dadurch, dass die allen Körpern eigenthümliche Elasticität gebührend in Betracht gezogen wurde, dass also die belasteten Körper nicht blos im Moment des Bruchs, sondern vielmehr hauptsächlich in ihrem vorhergehenden Zustand der stetig zunehmenden Formänderung und der diese bedingenden gegenseitigen Annäherungen, Entfernungen und überhaupt Verrückungen ihrer kleinsten Theile betrachtet wurden. In dieser Weise ist die Theorie der relativen Elasticität und Festigkeit mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen unter Andern namentlich von Eytelwein und Navier ausgebildet und auf die verschiedensten Fälle angewandt worden. Sie bedarf jedoch einiger Correctionen, zu denen man später durch eine allgemeinere Behandlung der Aufgabe gelangt ist, auf welche wir im Folgenden zurückkommen werden.

1638. GALILEI *Discorsi etc. Dialogo sec.* p. 108.
1684. LEIBNITZ Demonstrationes novae resistentia solidorum. Acta Erud. Lipsiae. p. 319.
1686. MARIOTTE *Traité du mouv. des eaux.* Part. V. Disc. II.
1702. VARIGNON *De la résist. des solides en gén. etc. Mém. de l'ac. de Paris.* p. 90.
1705. JAC. BERNOUILLI *Véritable hypothèse de la résist. des solides. Mém. de l'ac. de Paris.* p. 230.
1708. PARENT *Des résist. des poûtres etc. Mém. de l'ac. de Paris.* p. 20.
1762. MUSCHENBROEK Introductio ad phil. nat. T. I. Cap. XXI. De cohaerentia et firmitate. p. 390.
1798. P. S. GIRARD *Traité anal. de la résist. des solides etc.* Deutsch von KRÖNKE. 1803.
1808. * EYTELWEIN Handbuch der Statik fester Körper. Bd. II. Kap. 15. — 2te Aufl. 1832.
1826. * NAVIER *Rés. des leç. données à l'école des ponts et chaussées sur l'applic. de la méc. à l'établissement des constr. et des mach.* P. I. — 2. ed. 1838. Deutsch von WESTPHAL mit einem Anhange *.
1831. GERSTNER Handb. der Mech. Bd. I. Kap. III.
1844. A. F. W. BRIX Elem. Ber. d. Widerst. prism. Körper geg. d. Bieg. Verh. d. Gew.-Ver. in Pr. *.
1850. CLARK *The Britannia and Conway Tubular-Bridges.* (Enth. u. A. die Vers. von STEPHENSON, FAIRBAIRN und HODGKINSON üb. die Tragkraft guss- und schmiedeeis. Balken.)

§. 8. Tragfähigkeit und Biegung eines Balkens, der an einem Ende befestigt ist.

Indem wir die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeine Methode der Bestimmung der Tragfähigkeit und Biegung von Balken auf einige besondere Fälle anwenden und dabei einen horizontal liegenden und durch Schwerkräfte belasteten Balken als Repräsentanten eines solchen gelten lassen, auf den überhaupt beliebige parallele und gleichgerichtete Kräfte wirken, welche seine Axe rechtwinkelig schneiden, unterscheiden wir bezüglich der Unterstützungsweise die folgenden Hauptfälle:

1. der Balken ist an einem Ende befestigt, am andern frei;
2. er liegt mit beiden Enden auf Stützen;
3. er ist einerseits befestigt, andererseits auf eine Stütze aufgelegt;
4. er ist an beiden Enden befestigt;
5. er liegt auf drei oder mehr Stützen.

Wenn die parallelen äusseren Kräfte, abgesehen von denjenigen, welche die Unterstützungen ersetzen, nicht alle gleich gerichtet sind, so lassen sich allgemeine, den verschiedenen Unterstützungsweisen entsprechende Formeln nicht aufstellen. Der Bruchpunkt, sowie das demselben entsprechende, dem Widerstandsmoment W gleich zu setzende grösste resultirende Kraftmoment müssen in jedem einzelnen solchen Falle besonders ermittelt werden.

Wenn zunächst der Balken nur an einem Ende befestigt ist, während das andere frei hervorragt, so ist klar, dass der Bruchquerschnitt stets der äusserste am befestigten Ende ist, indem in Beziehung auf dessen neutrale Axe die Momentensumme der Kräfte am grössten ist. Sind also

$P_1\ P_2 \ldots$ die den Balken belastenden Gewichte,
$a_1\ a_2 \ldots$ die Abstände ihrer Angriffspunkte vom befestigten Ende; ist ferner
G sein eigenes Gewicht,
l seine Länge,

so ist die Bedingungsgleichung dafür, dass das Widerstandsmoment W des

Balkens durch das resultirende Moment der äusseren Kräfte in keinem Querschnitt überschritten wird, nach §. 7 5):

$$W = P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + \ldots + G \cdot \frac{l}{2} = \Sigma(Pa) + \frac{Gl}{2} \Big\} \quad \ldots 1),$$

wobei unter G auch irgend eine gleichmässig über die ganze Länge des Balkens vertheilte Last inclusive dessen Eigengewicht verstanden werden kann.

Wenn nur ein einziges Gewicht P am Ende des Balkens angreift, so hat man

$$W = P \cdot l + \frac{Gl}{2},$$

woraus man die grösste zulässige Belastung:

$$P = \frac{W}{l} - \frac{G}{2} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

findet. Es ist hierbei vorausgesetzt, die Biegung sei so gering, dass die horizontale Projection der elastischen Linie, oder der Hebelarm von P, nicht merklich kleiner ist, als deren wirkliche Länge l.

Ist Q eine gleichmässig über die ganze Länge des Balkens vertheilte Belastung, so findet man aus der letzten Gleichung, wenn man $P = 0$, dann $G = Q$ setzt, indem man jetzt unter Q die äussere Belastung $+$Eigengewicht verstehen kann, deren zulässigen Grenzwerth:

$$Q = 2 \frac{W}{l} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3).$$

Die Gleichungen 2) und 3) lehren, dass ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht des Balkens seine Tragfähigkeit seiner Länge umgekehrt proportional, und zwar doppelt so gross ist, wenn die Last gleichmässig vertheilt, als wenn sie am freien Ende angebracht ist.

Die grösste Durchbiegung, welche mit δ bezeichnet werden soll, findet in beiden Fällen am freien Ende statt, und zwar ist sie im ersten Fall:

$$\delta = \frac{P + \frac{3}{8} G}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4),$$

im zweiten Fall:

$$\delta = \frac{Q}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{8} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5).$$

Beide Formeln sind nur Näherungsformeln, als solche aber für jede Grösse von P und Q richtig, bei welcher die beiden Elasticitätsgesetze des §. 2 als richtig gelten können, was im Allgemeinen bis zu den durch die Gleichungen 2) und 3) bestimmten Grenzen der Belastung geschehen darf. Sie lehren, dass die Durchbiegung des Balkens, abgesehen von dem Einfluss seines eigenen Gewichts, dem Kubus seiner Länge proportional, dass sie aber bei gleichmässiger Vertheilung der Last nur $^3/_8$ so gross ist, als wenn eine ebenso grosse Last am Ende angreift.

Wir haben nur den Ausdruck 4) zu rechtfertigen; denn der folgende ergiebt sich sofort aus jenem, indem $P = 0$ und $G = Q$ gesetzt wird. Zu dem Ende sei ACB (*Fig.* 3) die elastische Linie des am freien Ende B mit dem Gewichte P belasteten Balkens, wodurch die gegen seine Länge $AB = l$ als sehr klein vorausgesetzte Durchbiegung $BD = \delta$ hervorgebracht wird, mit welcher Voraussetzung es übereinstimmt, dass um so mehr die Horizontalprojection AD als nicht verschieden von der Länge l in Rechnung gestellt wird. (Wenn $\frac{\delta}{AB}$ eine sehr kleine Grösse der ersten Ordnung ist, so ist $\frac{AB - AD}{AB}$ eine sehr kleine Grösse der zweiten Ordnung.) In Beziehung auf die rechtwinkeligen Axen AX und AY seien x, y die Coordinaten des beliebigen Punktes C der elastischen Linie, so ist, unter ρ den Krümmungshalbmesser in C verstanden, die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts nach §. 7 4) folgende:

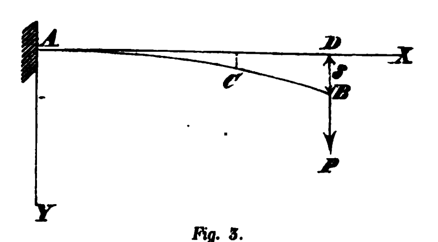


Fig. 3.

$$\frac{EI}{\rho} = P \,.\, (l - x) + \frac{G}{l} \cdot \frac{(l-x)^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{a).}$$

Es ist nämlich $\frac{G}{l}$ das Gewicht der Längeneinheit des Balkens, also $\frac{G}{l} \cdot (l - x)$ das Gewicht des Stückes CB, und $\frac{l-x}{2}$ der Hebelarm desselben in Beziehung auf den Punkt C. Nun ist bekanntlich:

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\pm 1}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

indem unserer Voraussetzung (§. 7 Nr. 4) entsprechend $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen 1 verschwindend klein ist. Insofern ρ einen absoluten Werth bedeutet, ist in seinem Ausdrucke das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ ist, je nachdem also die Curve ihre hohle Seite nach der Seite der positiven oder der negativen Ordinaten y kehrt. Im vorliegenden Falle gilt mit Rücksicht auf *Fig.* 3 das Zeichen +, und die Gleichung a) nimmt daher die folgende Gestalt an:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P \,.\, (l - x) + \frac{G}{l} \cdot \frac{(l-x)^2}{2}.$$

Sie ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung der elastischen Linie. Ihr erstes Integral ist:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = P \cdot \left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{G}{2l}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right).$$

Die Constante ist nämlich $= 0$, weil offenbar die elastische Linie von der Axe AX in A berührt wird, für $x = 0$ also auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Wenn man die letzte Gleichung nochmals integrirt und beachtet, dass $x = 0$, $y = 0$ zusammengehörige Werthe sind, so findet man:

$$EI \cdot y = P \cdot \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{G}{2l} \cdot \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

oder

$$EI \cdot y = P \cdot \frac{x^2(3l - x)}{6} + G \cdot \frac{x^2(6l^2 - 4lx + x^2)}{24l} \quad \ldots \text{b)}$$

als angenäherte Gleichung der elastischen Linie. Für $x = l$ ist $y = \delta$, also

$$EI \cdot \delta = P \cdot \frac{l^3(3 - 1)}{6} + G \cdot \frac{l^3(6 - 4 + 1)}{24}$$

$$= P \cdot \frac{l^3}{3} + G \cdot \frac{l^3}{8} = \left(P + \frac{3}{8}G\right)\frac{l^3}{3}$$

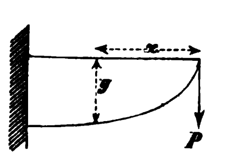
oder

$$\delta = \frac{P + \frac{3}{8}G}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}.$$

§. 9. Körper von gleichem Widerstande.

Wenn ein an einem Ende befestigter, am andern durch das Gewicht P belasteter Körper die prismatische Form und die erforderlichen Querdimensionen hat, um an ersterem Ende keine übermässige Spannung zu erfahren, so ist er in allen andern Querschnitten, wo die Spannung geringer ist, mehr als ausreichend stark. Es liegt daher die Frage nahe, wie der Körper gestaltet werden müsse, damit die specifische Spannung in dem von der neutralen Axe am weitesten entfernten Punkte und also auch (falls $k' = k''$ gesetzt wird) die Wahrscheinlichkeit der Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze in jedem Querschnitt gleich gross sei, mit andern Worten, damit der Körper für die vorausgesetzte Belastungsart ein sogenannter Körper von gleichem Widerstande sei. Nehmen wir an, der Körper solle von zwei verticalen und parallelen Ebenen begrenzt sein in der Weise, dass alle verticalen Querschnitte Rechtecke von gleicher Breite b sind, so kommt es nur auf das Längenprofil an, d. h. zunächst auf das Verhältniss der Höhe y irgend eines dieser Rechtecke zu seiner Entfernung x von dem freien und belasteten Ende des Körpers. Abgesehen von dem Eigengewicht ist nun das Moment der Kraft P in Beziehung auf irgend einen Querschnitt dessen Abstand x vom Angriffspunkt von P proportional; andererseits ist das diesem Kraftmoment gleiche Spannungsmoment des Querschnitts $= \sigma \cdot \frac{by^2}{6}$, unter σ die specifische Spannung der äussersten Faser verstanden, also dem Quadrat der Höhe y proportional, weil nach der Voraussetzung b, nach der Forderung σ für alle Querschnitte constant ist. Folglich muss dieser Forderung entsprechend das Quadrat der Höhe jedes verti-

calen **Querschnitts seiner Entfernung von dem belasteten Ende proportional sein.** Wenn also z. B. der Körper oben durch eine horizontale Ebene begrenzt sein soll, so muss er unten durch eine parabolische Cylinderfläche, oder wenn er eine horizontale Symmetrieebene haben soll, oben und unten durch gleiche parabolische Cylinderflächen begrenzt sein, wie *Fig. 4* zeigt.



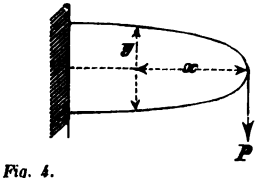


Fig. 4.

Wenn der einerseits befestigte Körper von constanter Breite eine über seine Horizontalprojection **gleichmässig vertheilte Belastung** zu tragen hat, so ist leicht einzusehen, dass das Moment derselben in Bezug auf irgend einen verticalen Querschnitt dem Quadrat der Entfernung x des letzteren vom freien Ende des Körpers proportional ist. Daraus folgt, **dass hier die Entfernung x der ersten Potenz der Höhe y des Querschnitts proportionirt sein,** dass also der Körper, wenn er z. B. oben durch eine ebene Fläche begrenzt ist, auch unten eben begrenzt sein muss, so dass er eine keilförmige Gestalt hat mit einer horizontalen Schneide am freien Ende.

Es muss bemerkt werden, dass in dem ersteren der beiden hier betrachteten Fälle, wo die Kraft P am Ende des Körpers angreift, die Vernachlässigung der in den Ebenen der Querschnitte hervorgerufenen Spannungen, welche die Schubelasticität, respective Schubfestigkeit repräsentiren, insofern zu einem offenbar fehlerhaften Resultate geführt hat, als die Höhe des Körpers beim Angriffspunkte der Kraft P gewiss nicht bis Null, sondern höchstens bis zu einer etwas grösseren, als derjenigen Höhe abnehmen darf, bei welcher die Schubfestigkeit überwunden werden würde. Man kann aber immerhin, wie es bei Consols und Balanciers häufig geschieht, die parabolische Form als näherungsweise dem Zweck entsprechend beibehalten, wenn man nur die Kraft nicht ganz am Ende angreifen lässt. — Auch darf es nur als näherungsweise richtig angesehen werden, wenn man die Tragfähigkeiten der beiden durch *Fig. 4* in der Seitenansicht dargestellten Körper bei gleicher Länge, Breite und Höhe als gleich gelten lässt, indem man die in §. 7 vorgetragene Theorie auf beide in gleicher Weise anwendet. Denn diese Theorie setzt eine prismatische Form, wenigstens eine gerade Axe des Körpers im unbelasteten Zustande voraus, d. h. eine gewisse gerade zur Kraft P senkrechte Mittellinie, welche der geometrische Ort der Schwerpunkte aller auf ihr senkrechten Querschnitte ist. Bei dem zweiten von den durch *Fig. 4* dargestellten Körpern findet sich diese Bedingung erfüllt, bei dem ersten nicht.

§. 10. Mit beiden Enden auf Stützen liegender Balken. Biegungsversuche.

Wenn ein Balken AB von der Länge l, dessen Gewicht $= G$ ist, mit beiden Enden A und B auf Stützen liegt und in der Mitte M die Last P trägt, so ist klar, dass der in der elastischen Linie zu denkende Angriffspunkt von P der Bruchpunkt ist. Um diesen Fall auf den in §. 8 betrachteten zurückzuführen, braucht man nur die eine Stütze, etwa bei B, durch eine äquivalente Kraft ersetzt zu denken. Diese Kraft, welche dem Druck auf die Stütze B gleich und entgegengesetzt ist, ist zwar streng genommen nicht wie P vertical, sondern normal auf der elastischen Linie oder vielmehr auf der unteren

gebogenen Fläche des Balkens; es ist aber den Voraussetzungen der Theorie in §. 7 entsprechend, ihre sehr kleine horizontale Componente zu vernachlässigen. Demzufolge kann die Stütze durch die vertical aufwärts gerichtete Kraft $\frac{P+G}{2}$ ersetzt werden. Die Hälfte MB des Balkens befindet sich nun im Wesentlichen in dem Fall des §. 8, mit dem Unterschiede jedoch, dass die von dem Eigengewichte herrührende gleichmässige Belastung nach der entgegengesetzten Richtung wirkt, als die Kraft $\frac{P+G}{2}$, welche am Ende angreift. Man wird daher im vorliegenden Fall die Bedingungsgleichung für den höchstens zulässigen Werth von P finden, wenn man in der Gleichung 2) des §. 8

$\frac{P+G}{2}$ an die Stelle von P,

$\frac{l}{2}$ an die Stelle von l,

$-\frac{G}{2}$ an die Stelle von G

setzt. Dadurch erhält man:

$$\frac{P+G}{2} = \frac{W}{\frac{l}{2}} + \frac{G}{4},$$

folglich

$$P = 4\frac{W}{l} - \frac{G}{2} \Big\} \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem Ausdruck 2) in §. 8 lehrt, dass ohne Rücksicht auf das Eigengewicht die Tragfähigkeit eines Balkens, wenn er mit beiden Enden auf Stützen liegend in der Mitte belastet wird, viermal so gross ist, als wenn er an einem Ende befestigt und am andern belastet ist. — Die Durchbiegung des Balkens ist offenbar in der Mitte am grössten, und man findet sie aus der Gleichung 4) des §. 8 durch die oben bemerkten Substitutionen, also:

$$\delta = \frac{\frac{P+G}{2} - \frac{3}{8}\cdot\frac{G}{2}}{EI}\cdot\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} = \frac{P+\frac{5}{8}G}{EI}\cdot\frac{l^3}{48} \Big\} \quad \ldots \quad 2).$$

Wenn der beiderseits auf Stützen liegende Balken die über seine ganze Länge gleichmässig vertheilte Last Q (inclusive Eigengewicht) zu tragen hat, so braucht man, um den grössten zulässigen Werth von Q zu finden, in der Formel 1) dieses Paragraphen nur $P = 0$, $G = Q$ zu setzen. Man findet dann:

$$Q = 8\frac{W}{l} \Big\} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

und ebenso aus der Gleichung 2) die Durchbiegung in der Mitte:

$$\delta = \frac{Q}{EI}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{l^3}{48} \Big\} \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

Die Vergleichung mit §. 8 lehrt, dass die **Tragfähigkeit eines über seine ganze Länge gleichmässig belasteten Balkens, wenn er mit beiden Enden auf Stützen liegt, viermal so gross ist, als wenn er nur mit einem Ende befestigt ist.**

Trägt der Balken die Last *P* nicht in der Mitte, sondern an irgend einer andern Stelle zwischen den beiden Stützen, so muss man zuerst untersuchen, wo der Bruchpunkt liegt. Dieser liegt nämlich nur dann im Angriffspunkt von *P*, wenn, unter *a* die kleinere der beiden Strecken verstanden, in welche derselbe die Länge *l* des Balkens theilt,

$$\frac{P}{G} \geqq \frac{\frac{l}{2} - a}{a} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5),$$

ist. Ist aber die Belastung im Verhältniss zum Eigengewicht des Balkens kleiner, so liegt der Bruchpunkt zwischen jenem Angriffspunkte und der Mitte. Im ersten Fall findet man die zulässige Belastung aus der Gleichung:

$$W = \left(P + \frac{G}{2}\right) \cdot \frac{a(l-a)}{l} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6),$$

im zweiten aus der Gleichung:

$$W = \frac{G}{2l} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{Pa}{G}\right)^2 \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7).$$

Vernachlässigt man das Gewicht des Balkens, so setzt man damit zugleich die Bedingung 5) unter allen Umständen als erfüllt voraus, weil $\frac{P}{G} = \frac{P}{0} = \infty$ wird; die Tragfähigkeit wird also durch die Gleichung bestimmt:

$$W = P \cdot \frac{a(l-a)}{l} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8).$$

Um die Formeln 5) bis 7) zu rechtfertigen, sei *ACB* (*Fig. 5*) die elastische Linie des Balkens, welcher bei *C* die Last *P* trägt in der Entfernung *a* vom Endpunkte *A*, der zum Anfangspunkt der rechtwinkeligen Coordinatenaxen *AX* und *AY* genommen wird. *AC* sei kleiner als *CB*. Die Stütze *B* werde durch die vertical aufwärts gerichtete Kraft

$$\frac{Pa}{l} + \frac{G}{2},$$

welche dem auf sie ausgeübten Drucke gleich ist, ersetzt; dann ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Strecke *AC* der elastischen Linie, nämlich die Momentengleichung für die Strecke *AC* des Balkens [§. 7 4)], folgende:

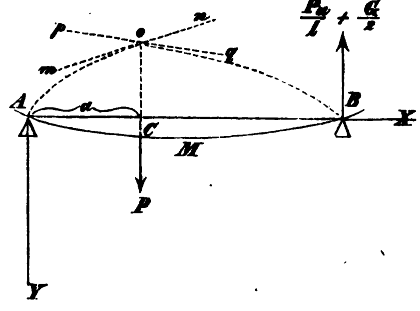


Fig. 5.

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x) - \left(\frac{Pa}{l} + \frac{G}{2}\right)(l-x) + \frac{G}{l} \cdot \frac{(l-x)^2}{2} \Bigg\} \quad \ldots \quad a)$$

und für die Strecke CB:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{Pa}{l} + \frac{G}{2}\right)(l-x) + \frac{G}{l} \cdot \frac{(l-x)^2}{2} \Big\} \quad . \quad . \quad \text{b)}.$$

Es ist nämlich

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2}$$

der angenäherte analytische Ausdruck für den reciproken Werth des Krümmungsradius (§. 8), und was die Vorzeichen betrifft, so sind die Kraftmomente auf den rechten Siten der Gleichungen a) und b) positiv oder negativ gesetzt, je nachdem sie, wenn sie allein vorhanden wären, den Balken so biegen würden, dass die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, oder so, dass dieselbe negativ wird.

Um den Bruchpunkt zu finden, muss derjenige Werth von x gesucht werden, durch welchen die rechte Seite der Gleichung a) oder b) den grössten absoluten Werth erhält (ein Maximum wird, wenn sie positiv, ein Minimum, wenn sie negativ ist). Indem man zu dem Ende die Ableitung $= 0$ setzt, findet man aus a):

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = -P + \frac{Pa}{l} + \frac{G}{2} - \frac{G}{l}(l-x) = 0 \Big\} \quad . \quad . \quad \text{c)}$$

$$-\frac{P(l-a)}{l} - \frac{G}{2} + \frac{Gx}{l} = 0$$

$$x = \frac{l}{2} + \frac{P}{G}(l-a) \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{d)}$$

und aus b):

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{Pa}{l} + \frac{G}{2} - \frac{G}{l}(l-x) = 0 \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{e)}$$

$$\frac{Pa}{l} - \frac{G}{2} + \frac{Gx}{l} = 0$$

$$x = \frac{l}{2} - \frac{P}{G}a \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{f)}.$$

Der erstere Werth von x, welcher einem zwischen A und C liegenden Punkte angehören müsste, ist im Widerspruch damit stets grösser als a, woraus folgt, dass der Bruchpunkt zwischen A und C nicht liegen kann. Seine Lage wird folglich durch den letzteren Ausdruck f) von x bestimmt, vorausgesetzt, dass der Werth desselben, welcher unter allen Umständen kleiner als $\frac{l}{2}$ ist, nicht auch kleiner als a ausfällt. Wenn aber dieser Werth kleiner als a ist, so dass der Bruchpunkt auch zwischen C und B nicht liegen kann, so muss man schliessen, dass er im Punkte C liegt. Der Grund ist die Stetigkeitsunterbrechung der elastischen Linie im Punkte C, welche von der vierten Ordnung ist; d. h. die dritte Ableitung

$$\frac{d^3y}{dx^3}$$

springt für $x = a$ plötzlich von einem endlichen Werth zu einem andern endlichen

Werth über, indem sie sich, wie die Vergleichung der Ausdrücke c) und e) lehrt, um die Grösse

$$\frac{P}{EI}$$

ändert. Diese Unterbrechung der Stetigkeit kann der elastischen Linie selbst nicht angesehen werden. Wenn man aber über der Horizontalen AB als Abscissenlinie die den zweiten Ableitungen proportionalen resultirenden Kraftmomente als Ordinaten auftrüge, so würde die dadurch bestimmte Curve für $x = a$ eine Stetigkeitsunterbrechung zweiter Ordnung erfahren, die sich durch einen vorspringenden Punkt (einen Knick) zu erkennen giebt. Ist dieser Knick so beschaffen, dass, wie es durch die punktirten Linien in *Fig. 5* angedeutet wird, die beiden Tangenten mn, pq an die im Punkte o sich schneidenden Curvenzweige Ao, Bo nach entgegengesetzten Seiten gegen die Horizontale AB geneigt sind, so entspricht dies dem Umstand, dass der Werth f) von x kleiner als a ausfällt, und es ist dann das resultirende Kraftmoment bei C in der That am grössten, obgleich kein Maximum im gewöhnlichen Sinne, welches sich dadurch zu erkennen giebt, dass die Ableitung $= 0$ wird.

Die Bedingung dafür, dass C der Bruchpunkt ist, ist also folgende:

$$\frac{l}{2} - \frac{P}{G} a \overline{\gtrless} a$$

oder

$$\frac{P}{G} \overline{\lessgtr} \frac{\frac{l}{2} - a}{a}.$$

Wird sie erfüllt, so findet man das grösste resultirende Kraftmoment, welches $= W$ gesetzt werden muss, indem man die rechte Seite der Gleichung a) oder b) entgegengesetzt nimmt und dann $x = a$ setzt. Dadurch erhält man die Formel 6). Wird aber jene Bedingung nicht erfüllt, so muss man den Werth f) von x in der entgegengesetzt genommenen rechten Seite der Gleichung b) substituiren, und findet so, wenn man den dadurch erhaltenen Werth $= W$ setzt, die Formel 7). Dass man, um den absoluten Werth des grössten Kraftmoments zu erhalten, die rechten Seiten der bezeichneten Gleichungen entgegengesetzt nehmen muss, hat darin seinen Grund, dass die elastische Linie ihre hohle Seite nach der Seite der negativen y kehrt, dass also die zweite Ableitung von y negativ ist.

Um die Gleichung der elastischen Linie und demnächst die grösste Durchbiegung zu finden, kann man hier nicht ohne Weiteres auf dieselbe Weise verfahren, wie es in §. 8 geschehen ist, weil man die Neigung der Tangente an keiner Stelle von vornherein kennt, also auch nicht die Constante des ersten Integrals der Gleichung a) oder b). Die in einem solchen Falle zu befolgende Methode wird im folgenden Paragraphen von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus erklärt werden.

Beispiel. Ein 4^m langer Balken aus Eichenholz von rechteckigem Querschnitt, 14^{cm} breit, 20^{cm} hoch, liegt mit beiden Enden auf Stützen. Mit wie viel Kilogrammen darf er in der Entfernung $= 0^m,4$ von einer Stütze belastet werden? — Ob die Bedingung 5) erfüllt wird, der Bruchpunkt also im Angriffspunkte der Last liegt, kann zwar *a priori* hier nicht geprüft werden; weil es aber im Allgemeinen der Fall ist, wenigstens wenn der Angriffspunkt nicht sehr nahe an einem Ende liegt, oder wenn die Höhe des Balkens im Verhältniss zur Breite nicht sehr klein ist, so rechnet man einstweilen nach der Formel 6), indem man sich die nachträg-

liche Prüfung vorbehält. Wird das specifische Gewicht des Eichenholzes = 1,17 angenommen, so ist das Gewicht des Balkens:

$$G = 1{,}4 \,.\, 2 \,.\, 40 \,.\, 1{,}17 = 131^{kg},$$

also findet man, wenn $k = 60$ genommen wird (§. 7), nach Formel 6):

$$60 \cdot \frac{14 \,.\, \overline{20}^2}{6} = (P + 65{,}5)\,\frac{40 \,.\, 360}{400}$$

$$P = 1490^{kg}.$$

Weil nun

$$\frac{P}{G} = \frac{1490}{131} = 11{,}37$$

$$\frac{\frac{l}{2} - a}{a} = \frac{20 - 4}{4} = 4$$

ist, so findet sich die Bedingung 5) erfüllt, es liegt also bei der Belastung von 1490^{kg} der Bruchpunkt in der That im Angriffspunkte derselben.

Wäre umgekehrt die Aufgabe gestellt, die erforderliche Höhe x des 4^m langen Balkens zu berechnen, damit er in der Entfernung $= 0{,}^m4$ von einer Stütze mit Sicherheit 1490^{kg} tragen kann, während die Breite 0,7 der Höhe betragen soll, so wäre das Gewicht des Balkens noch unbekannt und müsste als Function von x ausgedrückt werden. Weil aber dadurch die Gleichung 6) eine unreine kubische Gleichung werden würde, welche weniger bequem aufzulösen ist, so rechnet man lieber zunächst, ohne auf das Eigengewicht Rücksicht zu nehmen; nach Formel 8) hat man dann:

$$60 \cdot \frac{0{,}7 \,.\, x^3}{6} = 1490 \cdot \frac{40 \,.\, 360}{400}$$

$$x = 19{,}7^{cm}.$$

Vermittelst dieses Näherungswerthes könnte man nun G berechnen und dann nach Gleichung 6) einen corrigirten Werth von x. Man sieht übrigens aus diesem Beispiel, dass die nochmalige Rechnung in vielen Fällen entbehrlich ist, und man sich vielmehr damit begnügen kann, die berechnete Stärke abzurunden, indem man sie etwas grösser nimmt.

Die Formel 2) kann dazu benutzt werden, den Elasticitätsmodulus von festen Körpern zu berechnen, indem man einen geraden prismatischen Stab, am besten von rechteckigem Querschnitt, daraus verfertigt, denselben auf zwei Stützen von genau gemessenem Abstande l legt und die Durchbiegung δ misst, welche durch ein in der Mitte angehängtes Gewicht P hervorgebracht wird. Nach jener Formel ist nämlich:

$$E = \frac{P + \frac{5}{8} G}{\delta \,.\, I} \cdot \frac{l^3}{48}.$$

Diese Methode der Bestimmung des Elasticitätsmodulus ist vielfach, z. B. von Eytelwein, Gerstner und Lagerhjelm, angewandt worden; sie ist bequemer und selbst genauer, als diejenige der einfachen Dehnung, weil, wenn nur die Länge des Stabes im Vergleich mit seiner Dicke einigermassen beträchtlich ist, die Durchbiegung immer weit grösser ist und also schärfer gemessen werden kann, als die Ausdehnung, die derselbe Stab durch eine ziehende Belastung erleiden würde. Wenn man mit demselben Stab eine Versuchsreihe mit immer

grösserer Belastung anstellt, jedesmal die Grösse δ misst und E berechnet, so wird man, so lange man nahezu denselben Werth von E findet, sicher sein können, dass die der Formel zu Grunde liegenden Voraussetzungen erfüllt sind, dass also namentlich die Elasticitätsgesetze des §. 2 richtig sind und, was unmittelbar damit zusammenhängt, dass die neutrale Axe jedes Querschnitts durch seinen Schwerpunkt geht.

Auf *Taf. I. Fig. 1—4* ist der Apparat abgebildet, welcher von Gerstner bei seinen im Jahre 1830 im technischen Institut zu Prag über die Biegung angestellten Versuchen benutzt worden ist. Auf den verticalen Ständern D und F eines hölzernen Gerüstes waren Schuhe von der Form *Fig. 4* befestigt, in welche der zu prüfende vierkantige Stab, um seine Lage zu sichern, gelegt wurde. Der Abstand der inneren Kanten dieser Schuhe von einander ist als die maassgebende Länge l des Stabes zu betrachten. Ueber die Mitte des Stabes wurde ein hölzerner Sattel von der Form *Fig. 3* gehängt, welcher unten abgerundet und oben mit einer Schneide versehen war; letztere hatte einen Einschnitt, um den Metallbügel IKL aufzunehmen, an dem die Wagschale M hing. Quer über den Sattel wurde der um die Axe B drehbare hölzerne Fühlhebel BCA aufgelegt, dessen Spitze in einen über der verticalen Scale AH spielenden Draht auslief; auf der andern Seite der Drehaxe wurde er durch ein Gegengewicht G so weit ausgeglichen, dass er auf den Sattel einen kaum merklichen Druck ausübte, der seiner Verschiebung auf der Schneide des letzteren bei der Biegung des Stabes nicht hinderlich sein konnte. Das Verhältniss $BA:BC$ war $=15$, die Entfernung $BC=5$ Zoll. Der Zeiger musste also an der Scale AH die Durchbiegung δ stets genau in 15facher Vergrösserung zeigen, weil die Schneide des Sattels sich vertical abwärts parallel mit AH bewegte, folglich das Verhältniss $BA:BC$ für jede Lage des Fühlhebels dasselbe blieb.

Versuche:

1808. Eytelwein Handb. der Statik fester Körper. Bd. II. p. 348 u. ff. 1832. 2te Aufl. *.
1829. Lagerhjelm Vers. zur Best. der Elasticität u. s. w. des Stabeisens. Aus d. Schwed. von Pfaff.
1831. Gerstner Handb. d. Mech. Bd. I. p. 328 u. ff. *.

§. 11. Mit beiden Enden aufliegender Balken, der beliebig viele Gewichte trägt.

Die Untersuchung der Widerstandsfähigkeit eines Balkens, welcher mit beiden Enden auf Stützen liegt, ist namentlich für den Maschinenbau von Wichtigkeit; alle Wellen, die mit Räderwerk, Schwungrädern, Windetrommeln u. s. w. versehen sind, gehören in diese Kategorie. Wir wollen deshalb die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe dahin verallgemeinern, dass ein solcher Balken an beliebig vielen Stellen mit Gewichten beschwert ist. Weil man in solchen Fällen von den Längen der Naben, womit die Räder auf der Welle festsitzen, zu abstrahiren pflegt, so wollen wir annehmen, dass die sämmtlichen Gewichte in bestimmten einzelnen Querschnitten (in einzelnen Punkten der elastischen Linie) in endlichen Entfernungen von einander angreifen, also nicht über gewisse endliche Strecken des Balkens stetig ausgebreitet sind. In der Regel sind die Belastungen gegeben, und kommt es darauf an, die maassgebende Dimension des Querschnitts zu berechnen, so dass die grösste specifische absolute oder rückwirkende Spannung an irgend einer Stelle höchstens die als zulässig erachtete Grösse k' oder k'' hat. Es dient dazu die Gleichung [§. 7 5)] des auf die neutrale Axe des Bruchquerschnitts bezogenen Momentes M' der äusseren Kräfte und des Widerstandsmomentes W, welche, wenn der

Bruchpunkt bekannt ist, leicht angesetzt werden kann; nachdem eine der beiden Stützen durch eine dem Drucke auf dieselbe gleiche und entgegengesetzte Kraft ersetzt worden ist. Es bleibt also nur eine Regel für die Aufsuchung des Bruchpunktes anzuführen übrig.

Fig. 6.

AB (*Fig. 6*) sei die Axe des Balkens von der Länge l, welcher bei A und B auf Stützen liegt und in den Punkten

	C_1	C_2	....	C_n	
mit Gewichten:	P_1	P_2	......	P_n	beschwert ist,
in den Abständen:	a_1	a_2	......	a_n	vom Ende A,
	b_1	b_2	......	b_n	vom Ende B.

Sieht man vom Eigengewicht des Balkens ab, so liegt der Bruchpunkt nothwendig in einem der Angriffspunkte $C_1\ C_2 \ldots . C_n$, und man findet ihn auf folgende Weise. Man berechne den Druck R auf eine der beiden Stützen, etwa auf die Stütze A, welcher bekanntlich:

$$R = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \ldots . + P_n b_n}{l} = \frac{\sum_1^n (Pb)}{l}$$

ist; alsdann summire man, von demselben Ende A angefangen, so viele Gewichte, bis die Summe grösser als R wird. Der Angriffspunkt des letzten hinzuaddirten Gewichts ist der Bruchpunkt; oder, wenn

$$\sum_1^m (P) < R < \sum_1^{m+1} (P)$$

ist, so ist C_{m+1} der Bruchpunkt. Es könnte sich treffen, dass die Summe der ersten m Gewichte gerade $= R$ wird; dann ist natürlich die Summe der $(n-m)$ übrigen dem Druck auf die Stütze B gleich, und es kann C_m mit demselben Rechte als Bruchpunkt gelten wie C_{m+1}. In der That ist dann das resultirende Kraftmoment in Bezug auf jeden zwischen C_m und C_{m+1} liegenden Punkt der Axe gleich gross.

Wenn man das eigene Gewicht des Balkens berücksichtigt, welches $= G = g \,.\, l$ sein mag, so liegt der Bruchpunkt nicht nothwendig in einem der Angriffspunkte. Seine Entfernung x von der Stütze A findet man auf folgende Weise. Man berechne wieder den Druck R auf diese Stütze, welcher hier

$$R = \frac{\sum_1^n (Pb)}{l} + \frac{G}{2}$$

ist, und summire von A ausgehend so viele Gewichte, bis die Summe grösser als R wird. Findet man, dass

$$\sum_1^m (P) < R \gtreqless \sum_1^{m+1} (P)$$

ist, so liegt der Bruchpunkt entweder in dem Angriffspunkt C_{m+1}, wie im vorigen Fall, oder zwischen ihm und der Stütze A. Ersteres ist der Fall, wenn der Ausdruck

$$x = \frac{R - \sum_1^m (P)}{g} \Bigg\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

grösser als a_{m+1} oder $= a_{m+1}$ ist. Ist aber dieser Quotient kleiner als a_{m+1}, so ist er entweder $> a_m$ oder $= a_m$ oder $< a_m$. Im ersten Fall liegt der Bruchpunkt zwischen C_m und C_{m+1} in dem durch den Werth 1) von x bezeichneten Abstande von A; im zweiten Fall liegt er in C_m; im dritten kann er gleichfalls in C_m, aber auch zwischen C_m und A liegen, und um dies zu entscheiden, respective seine Lage zu bestimmen, muss man den Ausdruck:

$$x = \frac{R - \sum_1^{m-1} (P)}{g}$$

betrachten und ihn auf dieselbe Weise prüfen, wie den obigen. In der Regel wird schon der erste Ausdruck 1) über die Lage des Bruchpunktes entscheiden.

Um die Richtigkeit der angeführten Regeln zur Bestimmung des Bruchpunktes nachzuweisen, zunächst für den Fall, dass das eigene Gewicht des Balkens nicht berücksichtigt wird, werde das resultirende Kraftmoment in Beziehung auf irgend einen zwischen den Angriffspunkten des $m$ten und $(m+1)$ten Gewichts befindlichen Punkt M der Axe (*Fig. 6*) ausgedrückt. Ist der Abstand $AM = x$, so ist dieses resultirende Moment

$$= Rx - \sum_1^m [P(x-a)]$$

$$= Rx - x \,.\, \sum_1^m (P) + \sum_1^m (Pa)$$

$$= x \,.\, \left[R - \sum_1^m (P)\right] + \sum_1^m (Pa) \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad \text{a).}$$

Ebenso ist dasselbe in Beziehung auf irgend einen Punkt der Strecke $C_{m+1}\,C_{m+2}$, dessen Entfernung vom Punkte $A = x$ ist,

$$= x\left[R - \sum_1^{m+1} (P)\right] + \sum_1^{m+1} (Pa) \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad \text{b).}$$

Bei der Voraussetzung:

$$\sum_1^m (P) < R < \sum_1^{m+1} (P)$$

ist nun der Ausdruck a) um so grösser, je grösser x, der Ausdruck b) um so grösser, je kleiner x ist; und ebenso wächst überhaupt das resultirende Kraftmoment in der ganzen Strecke $A\,C_{m+1}$ mit wachsendem, in der ganzen Strecke $C_{m+1}\,B$ mit abnehmendem x. Daraus folgt, dass C_{m+1} der Bruchpunkt ist. — Wenn $R = \sum_1^m (P)$ ist, so ist der Ausdruck a) für jeden Werth von x, also für

alle Punkte zwischen C_m und C_{m+1} constant, nämlich $= \sum_1^m (Pa)$; die Lage des Bruchpunktes ist also zwischen diesen Grenzen unbestimmt.

Für den andern Fall, dass das Gewicht des Balkens in Betracht gezogen wird, ist das auf den Punkt M (*Fig.* 6) bezogene resultirende Kraftmoment

$$= Rx - \sum_1^m [P(x-a)] - gx \cdot \frac{x}{2}$$

$$= x\left[R - \sum_1^m (P)\right] + \sum_1^m (Pa) - \frac{gx^2}{2}.$$

Dieser Ausdruck kann für einen zwischen den Grenzen a_m und a_{m+1} liegenden Werth von x ein Maximum werden, und es ist dazu erforderlich, dass die Ableitung $= 0$, also

$$R - \sum_1^m (P) - gx = 0$$

ist, woraus

$$x = \frac{R - \sum_1^m (P)}{g} \quad \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c)$$

folgt. Da die zweite Ableitung negativ $= -g$ ist, so bestimmt in der That dieser Werth von x das Maximum der Momentensumme, vorausgesetzt, dass er nicht kleiner als a_m und nicht grösser als a_{m+1} ausfällt. Dazu ist jedenfalls zunächst erforderlich, dass er nicht $= 0$ oder negativ werde, woraus folgt, dass bei der Voraussetzung

$$\sum_1^m (P) < R \lesseqgtr \sum_1^{m+1} (P)$$

auf keinen Fall der Bruchpunkt über C_{m+1} hinaus nach dem Ende B hin liegen kann. Wird also der Gleichung c) zufolge dennoch $x > a_{m+1}$, so muss man schliessen, dass C_{m+1} der Bruchpunkt ist. Fällt aber $x < a_m$ aus, so muss die Strecke $C_{m-1}\, C_m$ vermittelst des Ausdrucks

$$x = \frac{R - \sum_1^{m-1} (P)}{g}$$

in Betracht gezogen werden u. s. f.

Beispiel. Die gusseiserne Schwungradwelle AB (*Fig.* 7) von der Länge $l = 5^m$ trage bei C im Abstande $= 0{,}^m8$ von A das 4500^{kg} schwere Schwungrad, bei D im Abstande $= 1^m$ vom Ende B ein Stirnrad, welches in ein anderes in der Weise eingreift, dass der Druck auf ersteres vertical abwärts gerichtet ist und mit dem Gewichte des Rades zusammen 2000^{kg} beträgt. Der an der Peripherie wirksame Druck lässt sich nämlich in eine ihm parallele und gleiche, die Axe der Welle schneidende Kraft und ein Kräftepaar zerlegen; letzteres nimmt die Welle auf Torsionsfestigkeit in Anspruch, wovon wir hier abstrahiren. Wir stellen uns die Aufgabe, mit Rücksicht auf die Biegung der Welle deren erforderlichen Durchmesser zu berechnen, während ihr Querschnitt ein

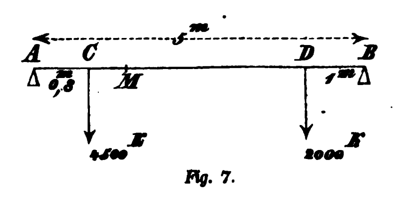


Fig. 7.

Kreis und die specifische absolute oder rückwirkende Spannung höchstens $= 500^{kg}$ sein soll. — Der Radius des Querschnitts sei $= r^{cm}$. Weil das Gewicht der Welle noch nicht bekannt ist, so ermitteln wir zunächst die Bruchstelle ohne Rücksicht darauf. Der Druck auf das Lager A ist:

$$R = \frac{4500 \,.\, 4{,}2 + 2000}{5} = 4180^{kg},$$

und weil $4500 > 4180$ ist, so ist C der Bruchpunkt, folglich das grösste Kraftmoment $= 4180 \,.\, 80$ Kilogrammcentimeter. Indem dasselbe dem Widerstandsmoment gleich gesetzt wird, ergiebt sich die Gleichung:

$$W = k\frac{I}{e} = 500\,\frac{\pi r^3}{4} = 4180 \,.\, 80,$$

woraus

$$r = \sqrt[3]{\frac{4180 \,.\, 80}{500 \,.\, 0{,}785}} \doteq 9{,}^{cm}48.$$

Nimmt man nun schätzungsweise $r = 10^{cm}$, so ist, das Gewicht von 1 Kubikdecimeter Gusseisen $= 7{,}^{kg}2$ gesetzt, das Gewicht der ganzen Welle:

$$G = \pi \,.\, 1^2 \,.\, 50 \,.\, 7{,}2 = 1130^{kg}$$

und

$$g = \frac{1130}{500} = 2{,}^{kg}26.$$

Der Druck auf das Lager A ist hiernach:

$$R = 4180 + \frac{1130}{2} = 4745^{kg},$$

und weil $4500 < 4745 < 6500$ ist, so kann der Bruchpunkt zwischen C und D, keinesfalls aber über D hinaus nach B zu liegen. Der Werth von x, nämlich:

$$x = \frac{4745 - 4500}{2{,}26} = 108{,}^{cm}4,$$

entscheidet darüber, dass er in der That zwischen C und D liegt, und bestimmt seinen Ort M. Die auf den Punkt M bezogene Momentengleichung ist nun:

$$500 \cdot \frac{\pi r^3}{4} = 4745 \,.\, 108{,}4 - 4500 \,.\, 28{,}4 - 2{,}26 \,.\, 108{,}4 \cdot \frac{108{,}4}{2}$$
$$= 373279$$

und es folgt daraus

$$r = 9{,}^{cm}83.$$

Ein Durchmesser der Welle von 20^{cm} ist folglich mit Rücksicht auf die Biegung allein in der That ausreichend gross. Man sieht übrigens auch hieraus, wie aus dem Beispiel in §. 10, dass es in gewöhnlichen Fällen ausreichend ist, die ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht des Balkens berechnete erforderliche Stärke desselben nach Schätzung etwas grösser zu nehmen, ohne die Rechnung zur Controle noch einmal durchzuführen.

Es mag nun noch die allgemeine Methode auseinandergesetzt werden, vermittelst welcher die Durchbiegung an jeder Stelle des in diesem

Paragraphen betrachteten, durch n Gewichte $P_1\, P_2 \ldots . P_n$ beschwerten Balkens (*Fig. 6*), also die Gestalt seiner elastischen Linie, gefunden werden kann. Zunächst ist klar, dass von einer einzigen die ganze Curve von A bis B darstellenden Gleichung nicht die Rede sein kann, dass vielmehr jede Strecke zwischen zwei benachbarten Angriffspunkten ihre besondere Gleichung haben muss. Denn jede solche Gleichung geht hervor durch zweimalige Integration der Momentengleichung, welche ausdrückt, dass das Spannungsmoment eines beliebigen Querschnitts der auf dessen neutrale Axe bezogenen Momentensumme der äusseren Kräfte gleich ist, welche Summe ihrerseits jedesmal um ein Glied ab- oder zunimmt, so oft man von einer Strecke zur nächsten übergeht. In Folge dessen hat die elastische Linie des Balkens in dem Angriffspunkte jeder Kraft eine Stetigkeitsunterbrechung von der vierten Ordnung, d. h. die dritte Ableitung $\frac{d^3 y}{d x^3}$ geht hier plötzlich von einem endlichen Werth zu einem andern endlichen Werth über. Für AB (*Fig. 6*) als Axe der x und die durch A abwärts gerichtete Verticale als Halbaxe der positiven y ist nämlich die Momentengleichung oder angenäherte Differentialgleichung zweiter Ordnung der beliebigen Strecke $C_{m-1}\, C_m$:

$$-EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = Rx - \frac{gx^2}{2} - \sum_1^{m-1} [P(x-a)],$$

für die folgende Strecke $C_m\, C_{m+1}$:

$$-EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = Rx - \frac{gx^2}{2} - \sum_1^{m-1} [P(x-a)] - P_m \cdot (x - a_m).$$

Im Punkte C_m, d. h. für $x = a_m$, sind die diesen beiden Gleichungen entsprechenden Werthe der zweiten Ableitungen von y einander gleich, die dritten Ableitungen erst unterscheiden sich um die endliche Grösse $\frac{P_m}{EI}$.

Nun sei die Neigung der elastischen Linie gegen die Horizontale im Punkte $A = \alpha$, in den Punkten $C_1\, C_2 \ldots . C_n$ respective $= \gamma_1\, \gamma_2 \ldots . \gamma_n$; die Ordinaten der letzteren Punkte seien $y_1\, y_2 \ldots . y_n$. Nachdem die Kraft R berechnet worden ist, durch welche die Stütze A ersetzt werden kann, setze man die Momentengleichung:

$$EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$$

für die erste Strecke $A\, C_1$ an. Aus ihr folgt durch zweimalige Integration, indem man die Constanten mit Rücksicht darauf bestimmt, dass

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = 0$$

entsprechende Werthe sind,

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi(x, \operatorname{tg} \alpha)$$

$$EI \cdot y = \psi(x, \operatorname{tg} \alpha)$$

In den beiden letzten Gleichungen setze man $x = a_1$; dadurch erhält man $\operatorname{tg} \gamma_1$ und y_1 durch bekannte Grössen und die Unbekannte $\operatorname{tg} \alpha$ ausgedrückt. Jetzt setze man die Momentengleichung:

$$EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = f_1(x)$$

für die zweite Strecke $C_1 C_2$ an und integrire sie zwei mal mit Rücksicht darauf, dass

$$x = a_1, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \gamma_1, \quad y = y_1$$

entsprechende Werthe sind, so findet man, nachdem für $\operatorname{tg} \gamma_1$ und y_1 die zuvor gefundenen Ausdrücke gesetzt worden sind,

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi_1 (x, \operatorname{tg} \alpha)$$

$$EI \, . \, y = \psi_1 (x, \operatorname{tg} \alpha).$$

So kann man fortfahren, die mit der Unbekannten $\operatorname{tg} \alpha$ behafteten Gleichungen aller einzelnen Strecken zu entwickeln. Ist endlich:

$$EI \, . \, y = \psi_n (x, \operatorname{tg} \alpha)$$

die Gleichung der letzten oder $(n+1)$ten Strecke $C_n B$, so kann aus ihr die Unbekannte $\operatorname{tg} \alpha$ gefunden werden, nämlich aus der Gleichung:

$$0 = \psi_n (l, \operatorname{tg} \alpha),$$

weil man weiss, dass $x = l$, $y = 0$ zusammengehörige Werthe und dieselben zur Bestimmung einer Constanten noch nicht benutzt worden sind. Indem man schliesslich in den Gleichungen der einzelnen Strecken für $\operatorname{tg} \alpha$ den gefundenen Werth substituirt, ist die Gestalt der elastischen Linie dadurch vollständig bestimmt.

Man könnte auch auf die Weise verfahren, dass man von einem beliebigen der Angriffspunkte, etwa von dem Punkte C_m, ausgehend und nach beiden Seiten fortschreitend die Gleichungen aller Strecken mit den beiden Unbekannten γ_m und y_m behaftet entwickelte, deren Werthe schliesslich aus den Gleichungen der beiden äussersten Strecken gefunden werden können.

§. 12. Körper von gleichem Widerstande.

Wenn ein Balken mit beiden Enden aufliegen und an einer beliebigen Stelle zwischen den Stützpunkten eine gegebene Last tragen soll, so findet man ohne Rücksicht auf sein eigenes Gewicht die erforderliche Grösse einer unbestimmt gelassenen Querschnittsdimension aus der Gleichung §. 10 8); also, wenn z. B. der Querschnitt ein Rechteck mit zwei horizontalen Seiten von gegebener Länge sein soll, so kann man aus jener Gleichung dessen Höhe berechnen. Die so gefundene Höhe ist aber nur für den Bruchquerschnitt, in welchem der Angriffspunkt der Last liegt, nöthig; für alle andern Querschnitte dürfte sie kleiner sein. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, die Figur des Längenschnitts des Balkens, wenn seine Breite als constant angenommen wird, so zu bestimmen, dass die specifische Spannung der äussersten Faser in jedem Querschnitt gleich gross ist, dass es also keine eigentliche Bruchstelle giebt, weil jeder Querschnitt mit gleichem Rechte als solche angesehen werden kann. Wenn der Balken die dieser Bedingung entsprechende Form hat, so ist natürlich das Material desselben, wenn es durch Giessen, Schmieden oder auch durch Zusammensetzen aus einzelnen Stücken ohne wesentlichen Verlust in eine solche Form gebracht werden

kann, am vollständigsten genutzt. Nimmt man an, dass der fragliche Längenschnitt einerseits durch die gerade Verbindungslinie *AB* der beiden Stützpunkte (*Fig. 8*) begrenzt sei, so muss er andererseits durch zwei parabolische Bogen *AC* und *BC* begrenzt sein, deren Scheitelpunkte *A* und *B* sind, deren Hauptaxen in der Geraden *AB* liegen, und welche sich bei *C* in der Richtungslinie der Last *P* treffen. — Die Forderung, dass die Spannung im gefährlichen Punkte, also auch die Neigung des Balkens zum Bruch, gleich gross sein soll, wo immer zwischen den Endpunkten *A* und *B* die Last angreifen mag, wird dadurch erfüllt, dass der Längenschnitt eine Ellipse mit der grossen Axe *AB* ist. — Dieselbe, nämlich die elliptische Form, entspricht auch der Bedingung, dass bei einer gleichmässig über der ganzen Länge des Balkens vertheilten Belastung die grösste specifische Spannung in jedem Querschnitt gleich gross sein soll.

Dass in dem Falle, wo die Last *P* bei *CD* (*Fig. 8*) in dem unveränderlichen Abstande *a* von der Stütze *A* angreift, die Curven *AC* und *BC*, welche nebst der Geraden *AB* das Längenprofil des Balkens begrenzen, Parabelbogen sein müssen, wenn die Neigung zum Bruch in jedem Querschnitt gleich gross sein soll, folgt unmittelbar aus §. 9, nachdem man die Stützen *A* und *B* durch die vertical aufwärts gerichteten äquivalenten Kräfte

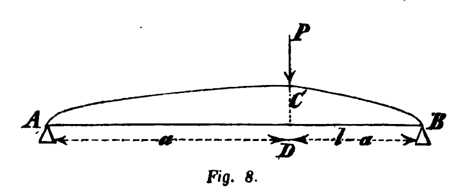


Fig. 8.

$$\frac{P\,.\,(l-a)}{l} \quad \text{und} \quad \frac{Pa}{l}$$

ersetzt hat. Die erforderliche Höhe *h* des Querschnitts *CD* und somit die Parameter

$$\frac{h^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{h^2}{l-a}$$

der Parabeln *AC* und *BC* findet man vermittelst der Gleichung [§. 10 8)]:

$$W = k\frac{bh^2}{6} = P\frac{a\,(l-a)}{l},$$

in welcher *b* die constante Breite des Balkens bedeutet. — Wenn ferner der Balken *ACBD* (*Fig. 9*) von der Länge $2a$, in welchem Abstande *x* von der Mitte *M* auch die Last *P* angehängt werden mag, in dem äussersten Punkte des Bruchquerschnitts *CD* stets dieselbe specifische Spannung *k* haben soll (eine Forderung, welche z. B. bei Eisenbahnschienen gestellt worden ist, wobei *P* den Druck der darüber rollenden Räder der Locomotive bedeutet), so muss

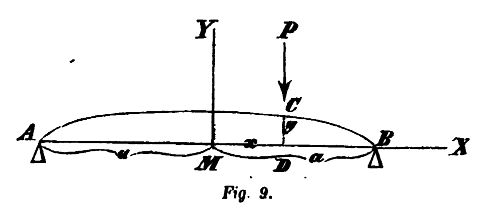


Fig. 9.

$$k\,.\,\frac{by^2}{6} = P\frac{(a+x)\,(a-x)}{2a} = P\frac{a^2-x^2}{2a}$$

oder

$$\frac{P}{2a} \cdot x^2 + \frac{kb}{6} \cdot y^2 = \frac{Pa}{2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3Pa}{kb}} = 1,$$

die Curve ACB folglich eine Ellipse sein, deren grosse Axe AB und deren halbe kleine Axe $= \sqrt{\frac{3Pa}{kb}}$ ist.

Wenn endlich die Last Q gleichmässig vertheilt ist und wieder die Mitte M von AB (*Fig. 9*) zum Anfangspunkt der Coordinaten irgend eines Punktes C der oberen Begrenzung ACB des Längenprofils genommen wird, dann ist, unter a die halbe Entfernung der Stützen verstanden, die Bedingung dafür, dass in dem beliebigen Querschnitte CD die grösste specifische Spannung $= k$ ist, folgende:

$$k \cdot \frac{by^2}{6} = \frac{Q}{2}(a-x) - \frac{Q}{2a} \cdot \frac{(a-x)^2}{2} = \frac{Q}{4a}(a^2 - x^2)$$

$$\frac{Q}{4a}x^2 + \frac{kb}{6}y^2 = \frac{Qa}{4}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3Qa}{2kb}} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $= a$ und deren halbe kleine Axe $= \sqrt{\frac{3Qa}{2kb}}$ ist.

Es muss übrigens hier dieselbe Bemerkung gemacht werden, welche schon in §. 9 gemacht wurde, dass nämlich die bis Null abnehmende Höhe des Balkens über den Stützen ein offenbar unzulässiges Resultat ist, welches sich nicht würde ergeben haben, wenn auf die Transversal- oder Schubspannung, die in der Nähe der Stützen von grösserem Einflusse als die Längenspannung der Fasern wird, Rücksicht genommen worden wäre. Man muss die Querschnitte über den Stützen so gross lassen, dass den auf sie wirkenden Drucken vermöge der Schubfestigkeit mit Sicherheit Gleichgewicht gehalten wird, und man kann dies etwa dadurch erreichen, dass man, ohne die parabolische oder elliptische Form aufzugeben, nur die Scheitelpunkte um eine passende Länge über die Stützen hinausrückt, dass man also den Balken so berechnet, als ob die Entfernung der Stützen etwas grösser wäre, als sie wirklich ist. Es ist dann gleichgültig, ob man schliesslich die überstehenden Enden beibehält oder wegfallen lässt.

§. 13. Mit einem Ende eingeklemmter, mit dem andern aufliegender Balken.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass ein Balken AB (*Fig. 10*) mit einem Ende A eingeklemmt ist, mit dem andern B auf einer Stütze liegt. Um hier den Bruchpunkt und demnächst die Bedingungsgleichung für die erforderliche Stärke oder für die höchstens zulässige Belastung des Balkens zu finden, kommt es zuerst darauf an, den Druck auf die Stütze B zu berechnen. Es ist klar, dass derselbe nicht einfach aus dem Princip des Hebels

gefolgert werden kann, dass er vielmehr nur dadurch bestimmbar wird, dass man die Elasticität und Biegung des Balkens in Betracht zieht.

1. Ist l die Länge des Balkens, und trägt er im Punkte C im Abstande a vom festen Ende A die Last P, so ist, abgesehen vom Eigengewicht, der Druck R auf die Stütze B:

$$R = P \cdot \frac{a^2(3l-a)}{2l^3} \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Von A ausgehend kehrt die elastische Linie ihre hohle Seite zuerst nach unten, dann nach oben. Irgendwo hat sie also einen Inflexionspunkt I, und zwar liegt derselbe stets zwischen dem festen Ende A und dem Angriffspunkte C der Last. Diese beiden Punkte A und C sind relative Bruchpunkte. Wird das im Querschnitt bei A hervorgerufene Spannungsmoment mit $[A]$ bezeichnet, so ist:

$$[A] = P\frac{a(l-a)(2l-a)}{2l^2} \quad \ldots\ldots \quad 2),$$

$$[C] = P\frac{a^2(l-a)(3l-a)}{2l^3} \quad \ldots\ldots \quad 3).$$

Ob $[A]$ oder $[C]$ das grössere Moment, d. h. ob A oder C der absolute Bruchpunkt ist [wobei vorausgesetzt ist, dass $k' = k''$ gesetzt wird (§. 7)], hängt von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{a}{l}$ ab. Je nachdem nämlich

$$\frac{a}{l} \lesseqgtr 2 - \sqrt{2}, \text{ d. h. ungefähr } \lesseqgtr 0{,}5858 \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

ist, ist A der absolute Bruchpunkt oder C. Ist $\frac{a}{l} = 2 - \sqrt{2}$, so ist die Wahrscheinlichkeit des Bruchs in den Querschnitten bei A und C gleich gross. In gleicher Weise ist auch die Stelle der grössten Durchbiegung von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{a}{l}$ abhängig; je nachdem nämlich

$$\frac{a}{l} \lesseqqgtr 2 - \sqrt{2}$$

ist, liegt dieselbe zwischen C und B, oder in C, oder zwischen A und C.

2. Trägt der Balken insbesondere die Last P in der Mitte, so ist der Druck auf die Stütze B:

$$R = \frac{5}{16}P \quad \ldots\ldots \quad 5).$$

Der äusserste Querschnitt an der Befestigungsstelle bei A ist der Bruchquerschnitt, und die zulässige Grösse von P ist:

$$P = \frac{16}{3} \cdot \frac{W}{l} \quad \ldots\ldots \quad 6).$$

Die Tragfähigkeit des Balkens ist also $\frac{4}{3}$ mal so gross, als wenn er mit beiden Enden auf Stützen liegt [§. 10 1)]. Die grösste

Durchbiegung findet in diesem Falle zwischen C und B in der Entfernung

$$x = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right) l = 0{,}553 \,.\, l \Big\} \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

vom festen Ende A statt, und zwar ist sie:

$$\delta = \frac{P}{EI} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{l^3}{48} = \frac{P}{EI} \cdot 0{,}447 \frac{l^3}{48} \Big\} \quad \ldots \ldots \quad 8).$$

Im Angriffspunkte von P, d. h. in der Mitte des Balkens, ist die Durchbiegung nur

$$= \frac{P}{EI} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{l^3}{48} = \frac{P}{EI} \cdot 0{,}437 \cdot \frac{l^3}{48} \Big\} \quad \ldots \ldots \quad 9).$$

3. Ist die Belastung Q über die ganze Länge des Balkens gleichmässig ausgebreitet, so ist der Druck auf die Stütze B:

$$R = \frac{3}{8} Q \Big\} \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

und die zulässige Grösse der Belastung:

$$Q = 8 \frac{W}{l} \Big\} \quad \ldots \ldots \quad 11),$$

wobei die Bruchstelle an dem befestigten Ende liegt. Ein Balken, welcher mit einem Ende befestigt ist, mit dem andern auf einer Stütze liegt, kann also nur eine ebenso grosse gleichmässig vertheilte Last tragen, als wenn er mit beiden Enden aufliegt [§. 10 3)].

4. Dass in dem zuerst betrachteten Falle, wo der Balken AB (*Fig. 10*) an einer beliebigen Stelle C die Last P trägt, der Inflexionspunkt I der elastischen Linie nothwendig zwischen A und C liegen muss, wenn man das eigene Gewicht des Balkens nicht berücksichtigt, lässt sich leicht von vornherein einsehen. Ersetzt man nämlich die Stütze B durch die noch unbekannte Kraft R, von der man nur weiss, dass sie kleiner als P ist, so ist die Abscisse x' des Punktes I durch die Bedingung bestimmt, dass der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für diesen Punkt unendlich gross, folglich die darauf bezogene algebraische Summe der Kraftmomente $\left(= \frac{EI}{\rho}\right) = 0$ ist. Das ist aber nur für einen zwischen A und C liegenden Punkt möglich, und zwar findet man x' aus der Gleichung:

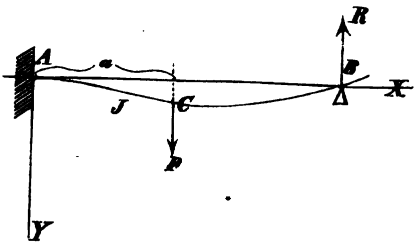


Fig. 10.

$$P(a - x') - R(l - x') = 0,$$

woraus

$$x' = \frac{Pa - Rl}{P - R} \Big\} \quad \ldots \ldots \quad a)$$

folgt. Hieraus ergiebt sich zunächst, weil nothwendig $P > R$ und x' ein positiver Werth ist, dass auch

$$Pa > Rl \quad \text{oder} \quad R < \frac{Pa}{l},$$

also der Druck auf die Stütze B jedenfalls kleiner ist, als er sein würde, wenn auch das andere Ende A des Balkens auf einer Stütze läge.

Die **Bestimmung des Drucks** R kann auf folgende Weise geschehen. Die Momentengleichung für die Strecke AC des Balkens ist:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P(a - x) - R(l - x) \Big\} \quad \ldots\ldots \quad \text{b)}.$$

Die Vorzeichen der beiden Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind durch die Rücksicht bestimmt, dass die Kraft P die hohle Seite der elastischen Curve nach der Seite der Halbaxe der positiven y, die Kraft R dieselbe nach der entgegengesetzten Seite zu biegen, erstere Kraft folglich die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv zu machen, letztere sie negativ zu machen strebt. Wenn man die Gleichung b) zweimal integrirt und dabei berücksichtigt, dass

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = 0$$

zusammengehörige Werthe sind, so erhält man:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - R\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \Big\} \quad \ldots\ldots \quad \text{c)}$$

$$EI \cdot y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - R\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$= \frac{Px^2}{6}(3a - x) - \frac{Rx^2}{6}(3l - x) \Big\} \quad \ldots\ldots \quad \text{d)}.$$

Integrirt man alsdann zweimal die Momentengleichung:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -R(l - x) \Big\} \quad \ldots\ldots \quad \text{e)},$$

welche sich auf die Strecke CB des Balkens bezieht, so findet man:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = P\frac{a^2}{2} - R\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \Big\} \quad \ldots\ldots \quad \text{f)}$$

$$EI \cdot y = P\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - R\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$= \frac{Pa^2}{6}(3x - a) - \frac{Rx^2}{6}(3l - x) \Big\} \quad \ldots \quad \text{g)},$$

indem man nämlich die Constanten $\frac{Pa^2}{2}$ und $-\frac{Pa^3}{6}$ mit Rücksicht darauf bestimmen muss, dass für $x = a$ die Gleichungen f) und g) respective mit den Gleichungen c)

und d) identisch werden müssen. Aus der Gleichung g) lässt sich nun R finden, indem man $x = l$, $y = 0$ setzt. Dadurch entsteht:

$$0 = \frac{Pa^2}{6}(3l - a) - \frac{Rl^3}{3},$$

folglich

$$R = P\frac{a^2(3l - a)}{2l^3}.$$

Substituirt man diesen Werth für R in den Gleichungen d) und g) der beiden Strecken AC und CB der elastischen Linie, so hat man dieselben ohne unbekannte Constante und kann dann vermittelst derselben für jede Stelle des Balkens die entsprechende Durchbiegung berechnen.

In jeder der beiden Strecken, die durch den Inflexionspunkt I getrennt sind, giebt es einen Bruchpunkt. Für irgend einen Querschnitt der Strecke AI des Balkens ist das Spannungsmoment

$$= P(a - x) - R(l - x) = Pa - Rl - (P - R)x.$$

Es ist um so grösser, je kleiner x ist, am grössten also für $x = 0$. Für irgend einen Querschnitt zwischen I und C ist das Spannungsmoment, absolut genommen,

$$= -P(a - x) + R(l - x),$$

also um so grösser, je grösser x ist, und am grössten für $x = a$. Das Spannungsmoment eines Querschnitts zwischen C und B endlich ist

$$= R(l - x),$$

also auch am grössten für $x = a$. A und C sind folglich die beiden Bruchpunkte. Das Spannungsmoment des Querschnitts bei A ist $= Pa - Rl$, das des Querschnitts bei $C = R(l - a)$. Setzt man in diesen Ausdrücken für R seinen Werth aus der Gleichung 1), so findet man die Ausdrücke 2) und 3). Dieselben sind einander gleich, wenn

$$2l - a = \frac{a(3l - a)}{l}$$

oder, $\frac{a}{l} = n$ gesetzt, wenn

$$2 - n = n(3 - n)$$
$$n^2 - 4n + 2 = 0$$
$$n = 2 - \sqrt{2}$$

ist. Die Grösse $2 - n$, welcher $[A]$ proportional ist, nimmt zu, wenn n abnimmt, und umgekehrt; die Grösse $n(3 - n) = 3n - n^2$ dagegen, welcher $[C]$ proportional ist, nimmt zusammen mit n ab und zu (ihre Ableitung $= 3 - 2n$ ist beständig positiv). Daraus folgt, dass A der absolute Bruchpunkt ist, wenn $n < 2 - \sqrt{2}$ ist, und C im entgegengesetzten Fall.

Dass die Bedingung:

$$\frac{a}{l} \lesseqgtr 2 - \sqrt{2}$$

auch darüber entscheidet, ob die Stelle der grössten Durchbiegung zwischen C und B, in C, oder zwischen A und C liegt, findet man, indem man untersucht, bei welchem Verhältniss von a und l die trigonometrische Tangente des Winkels γ,

den die Tangente der elastischen Linie im Punkte C mit der Abscissenaxe bildet, positiv, $=$ Null, oder negativ ist. Offenbar nämlich liegt jene Stelle zwischen C und B, wenn $\operatorname{tg}\gamma$ positiv ist, in C selbst, wenn $\operatorname{tg}\gamma = 0$, und zwischen A und C, wenn $\operatorname{tg}\gamma$ negativ ist. Den Ausdruck von $\operatorname{tg}\gamma$ erhält man aber aus einer der Gleichungen c) und f), indem man darin $x = a$ setzt.

2. Die Ausdrücke 5) bis 9), welche sich auf den besondern Fall beziehen, dass der Balken die Last P in der Mitte trägt, wird man dem Vorstehenden zufolge leicht herleiten können.

3. Wenn Q eine über den Balken seiner ganzen Länge nach gleichmässig ausgebreitete Last ist, so muss man von der Momentengleichung:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{l} \cdot \frac{(l-x)^2}{2} - R(l-x) \quad \ldots \quad \text{h)}$$

ausgehen und sie zweimal integriren, indem man die Constanten dadurch bestimmt, dass

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = 0$$

entsprechende Werthe sind. Weil man ausserdem weiss, dass für $x = l$, $y = 0$ ist, so kann man aus der erhaltenen, mit der Unbekannten R behafteten Gleichung der elastischen Linie:

$$EI \cdot y = \frac{Qx^2}{24\,l}(6l^2 - 4lx + x^2) - \frac{Rx^2}{6}(3l - x) \quad \ldots \quad \text{i)}$$

sofort jene Unbekannte finden. Dass ein relativer Bruchpunkt bei A liegt, giebt sich leicht zu erkennen; den zweiten findet man, indem man die rechte Seite der Gleichung h) nach x ableitet und die Ableitung $= 0$ setzt. Dadurch ergiebt sich die Abscisse dieses zweiten Bruchpunktes $= \frac{5}{8}l$. Indem man dann das resultirende Kraftmoment für beide Bruchpunkte berechnet, findet man

$$\text{das erste} = \frac{1}{8}Ql, \quad \text{das zweite} = \frac{9}{128}Ql.$$

Weil ersteres grösser ist, so ist A der absolute Bruchpunkt, falls, wie im Vorstehenden immer, $k' = k''$ vorausgesetzt wird, weshalb die zulässige Belastung durch die Gleichung bestimmt ist:

$$W = \frac{Ql}{8}.$$

§. 14. An beiden Enden befestigter Balken.

1. Ein Balken AB (*Fig. 11*) von der Länge l sei an beiden Enden fest eingeklemmt und bei C im Abstande a von A, b von B mit dem Gewichte P belastet. Wenn in diesem Fall zur Ermittelung der Tragfähigkeit die allgemeine Methode des §. 7 zur Anwendung kommen soll, so kann die Befestigung eines Balkenendes, etwa des Endes B, natürlich nicht durch eine einzelne Kraft ersetzt werden; man muss vielmehr zu ihrem Ersatz noch ein Kräftepaar hinzunehmen, dessen Moment dem in dem Querschnitt bei B wirksamen Spannungsmoment gleich ist. Auf solche Weise ergeben sich, wenn man das Eigengewicht des Balkens ausser Acht lässt und die grössten

zulässigen absoluten und rückwirkenden Spannungen k' und k'' einem Mittelwerthe k gleich setzt, die folgenden Resultate:

Der Balken hat stets drei relative Bruchpunkte: zwei an den Enden, den dritten im Angriffspunkt von P. Der absolute Bruchpunkt liegt immer an einem Ende, und zwar an demjenigen, welchem der Angriffspunkt der Last zunächst liegt; ist aber der Angriffspunkt in der Mitte, so ist die Wahrscheinlichkeit des Bruchs nicht nur in den beiden äussersten Querschnitten gleich gross, sondern auch ebenso gross als in dem mittleren Querschnitt. Der verticale Druck vertheilt sich auf die beiden Befestigungsstellen in etwas anderer Weise, als ob der Balken blos auf Stützen läge. Dieser Druck ist nämlich

$$\text{bei } A = \frac{3ab^2 + b^3}{l^3} P, \quad \text{bei } B = \frac{a^3 + 3a^2 b}{l^3} P \Bigg\} \quad \ldots \quad 1).$$

Ist $a > b$, so ist die höchstens zulässige Belastung:

$$P = W \frac{l^2}{a^2 b} \Bigg\} \quad \ldots \quad 2).$$

Wenn man diesen Ausdruck mit der Formel 8) in §. 10 vergleicht, so erkennt man, dass die Tragfähigkeit des beiderseits befestigten Balkens im Verhältniss $l:a$ grösser ist, als diejenige des blos unterstützten. Ist also die Last in der Mitte angebracht, so ist die Tragfähigkeit doppelt so gross, als bei blosser beiderseitiger Unterstützung, nämlich

$$P = 8 \frac{W}{l} \Bigg\} \quad \ldots \quad 3).$$

Die Durchbiegung ist in diesem Fall in der Mitte am grössten, und zwar:

$$\delta = \frac{P}{EI} \cdot \frac{l^3}{4 \cdot 48} \Bigg\} \quad \ldots \quad 4).$$

2. Ist die Belastung Q über die ganze Länge des Balkens gleichmässig vertheilt, so giebt es zwei gleichwerthige Bruchstellen an den befestigten Enden. Eine dritte relative Bruchstelle liegt in der Mitte des Balkens; jedoch sind hier die Spannungen der gleich weit von der neutralen Axe entfernten Längenfasern nur halb so gross, als an den Enden. Die zulässige Belastung ist:

$$Q = 12 \frac{W}{l} \Bigg\} \quad \ldots \quad 5),$$

die Durchbiegung in der Mitte:

$$\delta = \frac{Q}{EI} \cdot \frac{l^3}{8 \cdot 48} \Bigg\} \quad \ldots \quad 6).$$

Ein beiderseits befestigter Balken kann also eine $1\frac{1}{2}$ mal so grosse gleichmässig vertheilte Last tragen, als ein Balken, der mit beiden Enden auf Stützen liegt, oder der mit einem Ende befestigt ist und mit dem andern aufliegt; auch darf die gleichmässig vertheilte Last hier nur $1\frac{1}{2}$ mal so gross sein, als die in der Mitte angebrachte. [Siehe §. 10 3) und §. 13 11)].

1. Bezeichnet in dem Falle, dass die Last P im Punkte C (*Fig. 11*) angreift, Sl das Moment des Kräftepaares, welches zusammen mit der Verticalkraft R bei B angebracht werden muss, um die Befestigung zu ersetzen, ohne in dem Biegungszustand des Balkens etwas dadurch zu ändern, so ist die Momentengleichung für die Strecke AC:

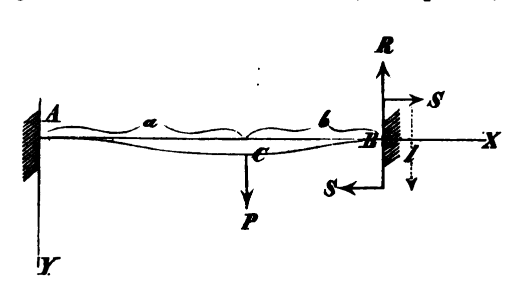


Fig. 11.

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x) - R(l-x) + Sl \quad \text{a)},$$

woraus folgt:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - R\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + Slx \quad \ldots \text{b)}$$

$$EI \cdot y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - R\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{Slx^2}{2}$$

$$= \frac{Px^2}{6}(3a-x) - \frac{Rx^2}{6}(3l-x) + \frac{Slx^2}{2} \quad \ldots \text{c)}.$$

Für die Strecke CB ist die Momentengleichung:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -R(l-x) + Sl \quad \ldots\ldots \text{d)},$$

und aus ihr folgt:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = P\frac{a^2}{2} - R\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + Slx \quad \ldots\ldots \text{e)}$$

$$EI \cdot y = P\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - R\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{Slx^2}{2}$$

$$= \frac{Pa^2}{6}(3x-a) - \frac{Rx^2}{6}(3l-x) + \frac{Slx^2}{2} \quad \text{f)},$$

indem die Constanten bei den beiden letzten Integrationen mit Rücksicht darauf bestimmt worden sind, dass für $x = a$ die Gleichungen e) und f) respective b) und c) identisch werden müssen. Wenn man in den Gleichungen e) und f) $x = l$ setzt, so erhält man für die Unbekannten R und S die folgenden beiden Bedingungen:

$$0 = \frac{Pa^2}{2} - \frac{Rl^2}{2} + Sl^2$$

$$0 = \frac{Pa^2}{6}(3l-a) - \frac{Rl^3}{3} + \frac{Sl^3}{2},$$

woraus

$$Sl = P\frac{a^2b}{l^2}, \quad R = P\frac{a^3 + 3a^2b}{l^3}$$

folgt. Dadurch sind die Ausdrücke 1) gerechtfertigt; denn was die Befestigungsstelle A betrifft, so ist sie vor der andern durch nichts ausgezeichnet, so lange das Verhältniss $a:b$ unbestimmt gelassen wird; man braucht also in dem Ausdruck

von R nur a und b zu vertauschen, um den Verticaldruck bei A zu finden, der übrigens auch $= P - R$ sein muss.

Das in dem Querschnitt bei B hervorgerufene Spannungsmoment ist $= Sl$, d. h.

$$[B] = P\frac{a^2 b}{l^2}, \quad \text{folglich} \quad [A] = P\frac{ab^2}{l^2}.$$

Dass nur die Endpunkte der beiden Strecken AC und CB, also die drei Punkte A, C, B relative Bruchpunkte sein können, folgt schon daraus, dass die rechten Seiten der Gleichungen a) und d) in Beziehung auf x vom ersten Grade sind. Das Spannungsmoment des Querschnitts bei C findet man aus jeder von jenen beiden Gleichungen, wenn man $x = a$ und für R und Sl die gefundenen Werthe setzt; man findet es negativ, weil die Krümmung bei C einem negativen Werth von d^2y entspricht, absolut genommen aber:

$$[C] = P\cdot\frac{2a^2b^2}{l^3}.$$

Es verhält sich also:

$$[A] : [C] : [B] = b : \frac{2ab}{l} : a = \frac{l}{2a} : 1 : \frac{l}{2b}.$$

Ist daher $a > b$, so ist:

$$[A] < [C] < [B],$$

folglich B der absolute Bruchpunkt und $P\frac{a^2b}{l^2}$ das grösste Spannungsmoment, welches $= W$ gesetzt werden muss.

Für $a = b$ ist $Sl = \frac{Pl}{8}$, $R = \frac{P}{2}$; setzt man diese Werthe in c) oder f) und ausserdem $x = a = \frac{l}{2}$, $y = \delta$, so findet man die Formel 4).

2. **Ist die Belastung Q gleichmässig über den ganzen Balken ausgebreitet**, so versteht es sich von selbst, dass der Verticaldruck an jedem Ende $= \frac{Q}{2}$ ist.

Die Momentengleichung ist daher:

$$EI\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{l}\frac{(l-x)^2}{2} - \frac{Q}{2}(l-x) + Sl \quad \ldots \quad \text{g)},$$

woraus

$$EI\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{l}\left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{Q}{2}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + Slx \quad \ldots \text{h)}$$

$$EI\,.\,y = \frac{Q}{l}\left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{Q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{Slx^2}{2}$$

$$= -\frac{Qx^3}{24l}(2l - x) + \frac{Slx^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \text{i)}.$$

Aus h) oder i) findet man, indem man $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = 0$ setzt,

$$Sl = \frac{Ql}{12}; \quad \text{folglich} \quad [B] = [A] = \frac{Ql}{12}.$$

Für die Mitte des Balkens ergiebt sich aus der Gleichung g) das Spannungsmoment nur halb so gross. Die Formel 6) folgt aus der Gleichung i), wenn $x = \frac{l}{2}$ und für Sl der gefundene Werth gesetzt wird.

Es muss bemerkt werden, dass die in diesem Paragraphen für den beiderseits befestigten Balken mitgetheilten Gesetze eine geringere Zuverlässigkeit haben, als diejenigen, welche für die andern Unterstützungsarten hergeleitet worden sind. Denn die Methode der Herleitung (die Substitution einer Verticalkraft R und eines Kräftepaares Sl für die Befestigung eines Balkenendes) beruht auf der Voraussetzung, dass in der Axe des Balkens trotz der Biegung keine Spannung stattfindet, eine Voraussetzung, die allerdings erfüllt sein kann, wenn höchstens ein Ende befestigt ist, indem alsdann theils über einer Stütze eine geringe Verschiebung erfolgen, theils der Querschnitt über einem Stützpunkt sich bei der Biegung gegen das andere Ende zu neigen, sein Mittelpunkt also jenem Ende näher gerückt werden kann. Sind aber beide Enden unwandelbar befestigt, so kann eine solche Annäherung nicht stattfinden, und die gebogene Axe muss nothwendig zugleich verlängert, also gespannt sein. — Andererseits ist jedoch zu bemerken, dass die Voraussetzung der unwandelbaren Befestigung beider Enden sich selten mit Genauigkeit erfüllt findet, und dass durch eine geringe Neigung eines Endes gegen die Horizontale offenbar die Tragfähigkeit des Balkens nicht unwesentlich vermehrt werden kann, indem dadurch das Spannungsmoment des betreffenden Endquerschnitts kleiner, das der mittleren Bruchstelle aber grösser werden muss. Wäre also bei horizontaler Richtung des Balkenendes das erstere Moment das grössere gewesen, so würde durch die Neigung jenes Endes eine vortheilhafte Ausgleichung beider stattfinden.

§. 15. Mehrfach unterstützter Balken.

Es liege nun schliesslich ein Balken auf beliebig vielen Stützen, deren obere Kanten genau in derselben horizontalen Ebene befindlich vorausgesetzt werden, und sei an beliebigen Stellen mit Gewichten beschwert. Um die Gestalt der elastischen Linie und den Bruchquerschnitt, sowie dessen Spannungsmoment finden zu können, ist zunächst erforderlich, den **Druck auf jede einzelne Stütze** zu bestimmen. Diese Bestimmung wäre nicht möglich, wenn man den Balken als unelastischen starren Körper betrachtete. Denn die Forderung, dass die als parallel und in einer Ebene wirksam anzusehenden Kräfte, nämlich die Gewichte und die Widerstände der Stützen, an dem festen System sich Gleichgewicht halten müssen, liefert nur zwei Bedingungen für dieses Gleichgewicht: 1) dass die algebraische Summe sämmtlicher Kräfte $= 0$ ist; 2) dass die algebraische Summe der Kraftmomente in Bezug auf eine beliebige, auf ihrer Ebene senkrechte Axe $= 0$ ist. Durch diese Bedingungen können die Widerstände der Stützen nur dann bestimmt sein, wenn ihre Anzahl nicht grösser als zwei ist. Bei der Voraussetzung jedoch, dass der Balken elastisch ist, lassen sich die Drucke auf die Stützen immer bestimmen, wie viele ihrer auch sein und wie immer die Belastungen vertheilt sein mögen. Sind diese Drucke aber bekannt, so kann man für jeden Querschnitt das resultirende Kraftmoment berechnen und also auch diejenigen Querschnitte ermitteln, deren es natürlich zwischen je zwei Inflexionspunkten, sowie zwischen jedem letzten Inflexionspunkt und der benachbarten letzten Stütze einen giebt, in Beziehung auf deren neutrale

Axen das resultirende Moment ein Maximum ist. Das grösste dieser relativen Maxima bestimmt den **absoluten Bruchquerschnitt**, falls, wie gewöhnlich, die grösste zulässige absolute der grössten zulässigen rückwirkenden Spannung gleich ($k' = k''$) gesetzt wird, oder falls die neutrale Axe Symmetrieaxe des Querschnitts oder auch nur $e' = e''$ ist (§. 7). Im Allgemeinen ist derjenige dieser relativen Bruchquerschnitte der absolute, d. h. den gefährlichen Punkt enthaltende, dessen Spannungsmoment, dem der betreffenden Biegungsrichtung entsprechenden Widerstandsmoment (dem kleineren der zugehörigen Ausdrücke $k' \cdot \frac{I}{e'}$ und $k'' \cdot \frac{I}{e''}$) gleich gesetzt, für die gesuchte zulässige Belastung den kleinsten oder für die gesuchte erforderliche Balkenstärke den grössten Werth liefert.

Es liege z. B. ein Balken auf drei Stützen A, B, C, und sei an zwei Stellen mit den Gewichten P und Q beschwert, so findet man bei der Anordnung und Bezeichnung, welche aus *Fig. 12* ersichtlich, den Druck R auf die Stütze A:

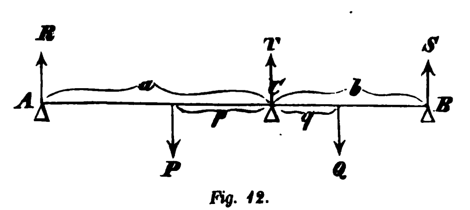


Fig. 12.

$$R = \frac{Pp\left[\frac{(3a-p)p}{2a} + b\right] + Qq\left[\frac{(3b-q)q}{2b} - b\right]}{a(a+b)} \quad . \quad . \quad 1).$$

Der Druck S auf die Stütze B ergiebt sich hieraus durch Analogie, indem nur P mit Q, p mit q, a mit b vertauscht zu werden braucht. Der Druck auf die Mittelstütze C ist schliesslich $= P + Q - R - S$. — Ist

$$a = b, \quad p = q, \quad P = Q,$$

so ist offenbar in der Mitte C die elastische Linie horizontal, und jede Hälfte des Balkens kann als in dem Fall §. 13 befindlich betrachtet werden, wo nämlich das eine Ende (hier C) horizontal befestigt, das andere (A oder B) in gleicher Höhe gestützt ist. Dann ist der Formel 1) in §. 13 zufolge:

$$R = P \cdot \frac{p^2(3a-p)}{2a^3}$$

und derselbe Ausdruck ergiebt sich aus der obigen allgemeineren Formel 1). Greifen insbesondere die gleichen Kräfte P in den Mitten beider Hälften des Balkens an, ist also auch noch $p = \frac{a}{2}$, so ist der Druck auf jede äussere Stütze $= \frac{5}{16} P$, derjenige auf die mittlere folglich $= \frac{11}{8} P$. Hingen die beiden Hälften des Balkens nicht zusammen, so wäre der Druck auf die mittlere Stütze nur $= P$, und man sieht, wie bedeutend er durch den Zusammenhang vergrössert wird.

Bemerkenswerth sind insbesondere diejenigen Fälle, in welchen ein mehrfach unterstützter Balken seiner ganzen Länge nach gleich-

mässig belastet ist, wie es z. B. im Grossen bei hölzernen und eisernen Brücken etc. vorkommt, deren beständige und hauptsächlichste Belastung ihr eigenes Gewicht ist, und bei deren Berechnung man auch die zufällige Belastung, indem man sie etwas grösser voraussetzt, als gleichmässig vertheilt anzunehmen pflegt. Für ein paar der einfachsten dieser Fälle sind die Resultate der Rechnung im Folgenden angeführt.

1. Wenn ein mit der Gesammtlast Q gleichmässig beschwerter Balken auf drei Stützen A, B, C liegt (*Fig. 13*), so findet man für die von diesen Stützen ausgeübten aufwärts gerichteten Widerstandskräfte (oder die auf sie ausgeübten abwärts gerichteten Druckkräfte) R, S, T:

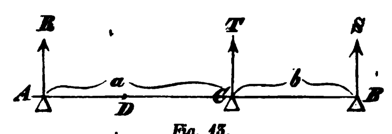


Fig. 13.

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{Q}{8}\,\frac{3a^2 + ab - b^2}{a(a+b)} \\ S &= \frac{Q}{8}\,\frac{3b^2 + ab - a^2}{b(a+b)} \\ T = Q - R - S &= \frac{Q}{8}\,\frac{a^2 + 3ab + b^2}{ab} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2).$$

Ist $a > b$, so wird S negativ, wenn

$$\frac{b}{a} < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{oder} < 0{,}434 \ldots$$

ist. In diesem Falle muss, um den Endpunkt B der elastischen Linie in gerader Linie mit A und C zu erhalten, bei B eine von oben her drückende Stütze angebracht werden, deren Druck beständig durch den obigen Ausdruck von S, absolut genommen, repräsentirt wird. — Es giebt entweder zwei oder drei relative Bruchquerschnitte. Der erste liegt stets über der Mittelstütze C, und ihm entspricht das Spannungsmoment:

$$[C] = \frac{Q}{8}\,\frac{a^2 - ab + b^2}{a + b} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Der zweite liegt, wenn $a > b$ ist, immer zwischen A und C im Abstande

$$AD = \frac{R(a+b)}{Q}$$

von A, und es entspricht ihm das Spannungsmoment:

$$[D] = \frac{R^2(a+b)}{2Q}.$$

Ein dritter endlich kann zwischen C und B liegen; sein Spannungsmoment ist indess stets das kleinste von den drei relativ grössten, und er ist gar nicht mehr vorhanden, sobald S negativ, d. h. $b < 0{,}434 \ldots a$ geworden ist. Wenn $k' = k''$ gesetzt wird, oder wenn $e' = e''$ ist, so ist unter allen Umständen C

der absolute Bruchpunkt, also $[C] = W$ die Bedingungsgleichung für die höchstens zulässige Belastung oder die wenigstens erforderlichen Dimensionen des Balkens.

Ist $a = b = \frac{l}{2}$, so wird:

$$R = S = \frac{3}{16}Q; \quad T = \frac{5}{8}Q; \quad [C] = \frac{Ql}{32},$$

also die zulässige Belastung:

$$Q = 32\frac{W}{l}.$$

Die letzteren Formeln erhält man auch, wie es sein muss, aus denen 10) und 11) des §. 13, wenn man dort $\frac{l}{2}$ statt l und $\frac{Q}{2}$ statt Q setzt. Durch Unterstützung der Mitte wird also die Tragfähigkeit eines gleichmässig belasteten Balkens vervierfacht.

Wenn man, während $b < 0{,}434\,..\,a$ ist, und die Stütze B von oben drückt, die Mittelstütze C ihr näher und näher rücken lässt, so werden in der Grenze die unendlich nahe gerückten entgegengesetzten Stützen B und C dieselbe Wirkung haben, als ob das Ende B des Balkens eingeklemmt wäre. Man muss also auch auf diesem Wege von der vorliegenden Aufgabe zu derjenigen des §. 13 übergehen können; und in der That findet man für $b = 0$, $a = l$:

$$R = \frac{3}{8}Q; \quad [C] = \frac{Ql}{8}; \quad [D] = \frac{9}{128}Ql.$$

2. Liegt der mit der Last Q gleichmässig beschwerte Balken auf vier Stützen A, B, B', A' (*Fig. 14*), von denen A und A', B und B' gleich weit von der Mitte M entfernt sind, so findet man den abwärts gerichteten Druck R auf die äusseren Stützen:

Fig. 14.

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{Q}{16}\,\frac{3a^3 + 3a^2b - 15ab^2 + b^3}{a(a-b)(a+2b)} \\ \text{folglich}\quad S &= \frac{Q}{2} - R = \frac{Q}{16}\,\frac{(a+b)(5a^2-b^2)}{a(a-b)(a+2b)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

Wenn das Verhältniss $b : a$ von 0 bis 1 wächst, so nimmt R zuerst bis 0 ab und wird dann negativ, d. h. es müssen die Stützen A und A' von oben nach unten drücken, um die Endpunkte A und A' der elastischen Linie in der Horizontalen BB' zu erhalten. — Ein relativer Bruchquerschnitt liegt in der Mitte M, ein zweiter und dritter bei B und B', ein vierter und fünfter in den Strecken AB und $A'B'$ im Abstande

$$= \frac{R}{Q}\,2a$$

von A oder A'. Die beiden letzten verschwinden, wenn R negativ wird. Wenn $k' = k''$ gesetzt wird, oder wenn $e' = e''$ ist, so sind B und B' stets die abso-

luten Bruchquerschnitte, und zwar ist das ihnen entsprechende, dem grössten Kraftmoment gleiche Spannungsmoment:

$$[B] = [B'] = \frac{Q}{16} \left\{ \frac{(a-b)^3 + (2b)^3}{a(a+2b)} \right\} \quad \ldots \quad 5).$$

Sind die vier Stützen gleich weit von einander entfernt, d. h. ist $a = \frac{l}{2}$, $b = \frac{l}{6}$, unter l die ganze Länge AA' verstanden, so wird:

$$R = \frac{4}{30} Q; \quad S = \frac{11}{30} Q; \quad [B] = [B'] = \frac{Ql}{90}.$$

Lässt man, während die Stützen A und A' von oben her drücken, die Mittelstützen B und B' ihnen näher und näher rücken, so hat man in der Grenze, wenn $b = a$ geworden ist, den in §. 14 betrachteten Fall eines beiderseits eingeklemmten Balkens. Die Formel 5) geht dann über in:

$$[B] = [B'] = \frac{Ql}{12},$$

so dass also die höchstens zulässige Belastung

$$Q = 12 \frac{W}{l}$$

ist, was mit §. 14 5) übereinstimmt.

3. Liegt der Balken auf fünf gleich weit von einander entfernten Stützen A_1 A_2 A_3 A_4 A_5, und sind die auf sie kommenden Pressungen respective R_1 R_2 R_3 R_4 R_5, so findet man:

$$R_1 = R_5 = \frac{11}{112} Q; \quad R_2 = R_4 = \frac{32}{112} Q; \quad R_3 = \frac{26}{112} Q.$$

Die absoluten Bruchquerschnitte liegen über den Stützen A_2 und A_4, und zwar ist das ihnen entsprechende Spannungsmoment:

$$[A_2] = [A_4] = \frac{3}{448} Ql.$$

Der Druck auf die Mittelstütze ist hier also keineswegs der grösste, und dieselbe Bemerkung findet man bei einer noch grösseren Anzahl von Stützen bestätigt.

4. Bei einem siebenfach in gleichen Abständen gestützten Balken z. B. findet man näherungsweise

für die Pressungen: R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 R_7
auf die respectiven Stützen: A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7

$$R_1 = R_7 = 0{,}0657 \cdot Q$$
$$R_2 = R_6 = 0{,}1892 \cdot Q$$
$$R_3 = R_5 = 0{,}1602 \cdot Q$$
$$R_4 = 0{,}1700 \cdot Q.$$

Die allgemeine Methode, vermittelst welcher unter allen Umständen der Druck auf jede Stütze berechnet werden kann, ist folgende:

Es stelle $A_1\,A_n$ (*Fig. 15*) die Axe des auf n Stützen

$$A_1 \; A_2 \; A_3 \ldots\ldots A_n$$

liegenden Balkens vor, welcher mit beliebigen Gewichten:

$$P_1 \; P_2 \; P_3 \ldots\ldots P_m$$

an beliebigen Stellen:

$$B_1 \; B_2 \; B_3 \ldots\ldots B_m$$

belastet ist. Es seien:

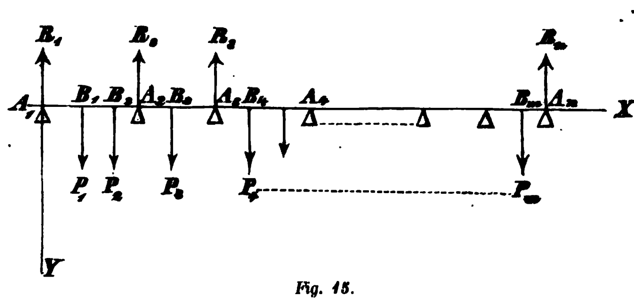


Fig. 15.

$$R_1 \; R_2 \; R_3 \ldots\ldots R_n$$

die den vertical abwärts gerichteten Pressungen auf die Stützen gleichen aufwärts gerichteten Kräfte, wodurch diese Stützen, ohne an dem Gleichgewichtszustande des Balkens etwas zu ändern, ersetzt werden können. Die Horizontale $A_1\,X$ und Verticale $A_1\,Y$ seien Coordinatenaxen. Man setze die Momentengleichung für die Strecke $A_1\,B_1$ an, indem man das Spannungsmoment $EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ der algebraischen Summe der Momente der Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_m$ und $R_2\,R_3 \ldots R_n$ gleichsetzt (die ersteren Momente bei der angenommenen Richtung der Ordinatenaxe positiv, die letzteren negativ nehmend), und integrire diese Gleichung zweimal, indem man die Constanten mit Rücksicht darauf bestimmt, dass, unter α die unbekannte Neigung der elastischen Linie gegen die Abscissenaxe im Punkte A_1 verstanden,

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad y = 0$$

entsprechende Werthe sind. Die zuletzt erhaltene Gleichung ist die mit den Unbekannten $R_2\,R_3 \ldots R_n$ und $\operatorname{tg}\alpha$ behaftete Gleichung der Strecke $A_1\,B_1$ der elastischen Linie. Aus den beiden Gleichungen für $\frac{dy}{dx}$ und y bestimme man, indem man $x = A_1\,B_1$ setzt, für den Punkt B_1 die Neigung der Tangente und die Ordinate, setze dann die Momentengleichung für die folgende Strecke $B_1\,B_2$ an und bestimme bei deren zweimaliger Integration die beiden Constanten mit Rücksicht auf die soeben gefundenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und y für den Punkt B_1. Dadurch erhält man die Gleichung der Strecke $B_1\,B_2$ mit denselben Unbekannten wie die der vorigen. Es ist klar, wie man auf diese Weise fortfahren und die mit denselben Unbekannten behafteten Gleichungen aller einzelnen Strecken der elastischen Linie finden kann. Jedoch ist dabei zu bemerken, dass man bei den zweiten Integrationen der für die Strecken $A_2\,B_3$, $A_3\,B_4$ etc. angesetzten Momentengleichungen nicht die Gleichungen der vorhergehenden Strecken zu benutzen braucht, weil man *a priori* weiss, dass für $x = A_1\,A_2$, $x = A_1\,A_3$ etc. $y = 0$ ist. Deshalb sind die $n - 1$ Gleichungen zwischen $R_2\,R_3 \ldots R_n$ und $\operatorname{tg}\alpha$, welche man erhält, wenn man in den Gleichungen der den Stützen $A_2\,A_3 \ldots A_n$ unmittelbar vorhergehenden Strecken $B_2\,A_2$, $B_3\,A_3 \ldots B_m\,A_n$ respective $x = A_1\,A_2$, $x = A_1\,A_3 \ldots x = A_1\,A_n$ setzt, ebenso viele unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der in ihnen enthaltenen Unbekannten, und sie reichen, verbunden mit den zwei Bedingungsgleichungen des

Gleichgewichts der sämmtlichen parallelen Kräfte $P_1 P_2 \ldots P_m$ und $R_1 R_2 \ldots R_n$ unter sich, gerade aus, um die $n+1$ Unbekannten $R_1 R_2 \ldots R_n$ und $\operatorname{tg}\alpha$ zu finden.

Wenn man dann für $R_2 R_3 \ldots R_n$ und $\operatorname{tg}\alpha$ die gefundenen Werthe in den Gleichungen der einzelnen Strecken substituirt, so hat man dieselben frei von unbekannten Constanten und kann nun auch für jede Stelle des Balkens die entsprechende Durchbiegung berechnen.

Statt des Punktes A_1 hätte man auch einen andern Stützpunkt und selbst einen beliebigen andern Punkt der elastischen Linie als Ausgangspunkt wählen und nach beiden Seiten hin von Strecke zu Strecke fortschreiten können; falls man nämlich einen beliebigen Punkt wählt, hat man zwar eine Unbekannte mehr in den Gleichungen, nämlich die Ordinate dieses Punktes, aber man erhält auch, wie leicht ersichtlich, eine Gleichung mehr zu ihrer Bestimmung. Sind die Stützen sowohl als die Belastungen in Bezug auf die Mitte des Balkens symmetrisch vertheilt, so geht man am besten von der Mitte aus, auch wenn sich daselbst keine Stütze befindet.

Hat der Balken nur sich selbst oder überhaupt eine über seine ganze Länge gleichmässig vertheilte Last zu tragen, so unterscheidet sich das Verfahren zur Bestimmung der Pressungen auf die Stützpunkte von dem zuvor auseinandergesetzten nur dadurch, dass es die Stützpunkte allein sind, in welchen eine Unterbrechung der Stetigkeit höherer Ordnung der elastischen Linie stattfindet, weil sie allein dieselbe in Strecken abtheilen, deren Momentengleichungen verschieden sind. Das obige Verfahren behält ferner seine Gültigkeit, wenn die Belastungen theilweise in einzelnen Punkten angreifen, theilweise über einzelne endliche Strecken nach beliebigen Gesetzen vertheilt sind, überhaupt also für eine ganz beliebige Art der Belastung; die Abtheilung der elastischen Linie in einzeln zu betrachtende Strecken geschieht in allen denjenigen Punkten, wo eine Unterbrechung in der Stetigkeit der Belastung stattfindet, insofern die Widerstandskräfte R der Stützen auch zu den belastenden Kräften gerechnet werden.

§. 16. Verallgemeinerung der Theorie der relativen Festigkeit.

Bisher ist angenommen worden, dass die einen prismatischen Balken auf relative Elasticität und Festigkeit in Anspruch nehmenden Kräfte, während sie unter allen Umständen der Definition in §. 1 gemäss seine Axe senkrecht schneiden, ausserdem noch 1) sämmtlich parallel sind, und 2) dass ihre gemeinschaftliche Ebene eine Symmetrieebene des Balkens vor seiner Biegung ist (§. 7, Voraussetzung 1 und 2). Bei diesen beiden Voraussetzungen war es einleuchtend, dass die elastische Linie eine einfach gekrümmte, in der Ebene der Kräfte liegende Curve sein musste. Für die meisten technischen Anwendungen reicht die Theorie der relativen Festigkeit in dieser Einschränkung in der That aus; allein es können auch Fälle vorkommen, wo sie unzureichend ist, und es soll deshalb die in §. 7 im Allgemeinen entwickelte und in den folgenden Paragraphen auf einige besondere Fälle angewandte Theorie in diesem Paragraphen insofern verallgemeinert werden, als wir die oben bemerkten beiden Voraussetzungen fallen lassen.

1. Abstrahiren wir zunächst nur von der Symmetrie des Balkens in Beziehung auf die Ebene der Kräfte, und nehmen wir alsdann den einfachsten Fall an, dass ein an einem Ende eingeklemmter prismatischer Balken von beliebigem Querschnitt durch eine seine

Axe in einem Punkte A senkrecht schneidende Kraft P gebogen wird, deren Richtung im Uebrigen beliebig ist. Das eigene Gewicht des Balkens werde dabei ausser Acht gelassen. Wenn nun, wie bisher und im Folgenden immer, die Biegung als sehr gering vorausgesetzt wird, so ist zwar auch hier noch die elastische Linie einfach gekrümmt, allein ihre Ebene, welche wir die Biegungsebene nennen wollen, bildet mit der Kraftebene, welche durch die Axe des ungebogenen Balkens und die Richtungslinie von P bestimmt wird, einen Winkel, der bis 90^{0} betragen kann. Es sei nämlich (*Fig. 16*):

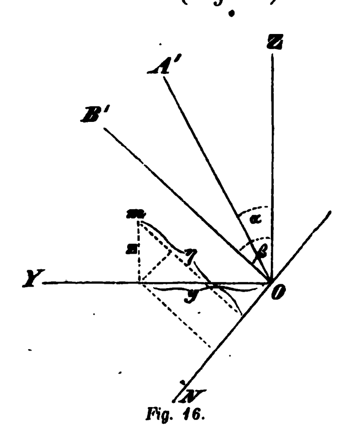


Fig. 16.

- O ein beliebiger Punkt der elastischen Linie zwischen dem Angriffspunkt A und der Befestigungsstelle des Balkens; seien ferner
- OX, OY, OZ drei auf einander senkrechte, durch O gelegte Coordinatenaxen, von denen die erste die elastische Linie im Punkte O berührt, während OY und OZ mit den beiden Hauptaxen für den Schwerpunkt O des entsprechenden Querschnitts des Balkens zusammenfallen;
- OA' der Durchschnitt der Ebene YZ besagten Querschnitts mit derjenigen Ebene, welche durch OX gehend mit der Kraft P parallel ist, und deren Richtung wegen der als sehr gering vorausgesetzten Biegung von der Richtung der Kraftebene nur sehr wenig abweichen kann;
- OB' der Durchschnitt der Ebene YZ mit der Biegungsebene;
- α der spitze Winkel ZOA';
- β der spitze Winkel ZOB';
- q der Inhalt des Balkenquerschnitts;
- $I = \int z^2 . dq$ das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf die Hauptaxe OY;
- $I' = \int y^2 . dq$ das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf die Hauptaxe OZ; so ist:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I}{I'} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \Big\} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 1).$$

Hiernach ist im Allgemeinen nur dann $\beta = \alpha$, wenn $I = I'$ ist, was z. B. immer stattfindet, wenn der Querschnitt ein reguläres Polygon ist. Sind aber I und I' nicht gleich gross, sondern ist etwa $I > I'$, so ist nur dann $\beta = \alpha$, wenn $\alpha = 0$ oder $= 90^{0}$ ist; in allen andern Fällen ist $\beta > \alpha$.

Wenn $I > I'$ ist, so ist zugleich I das grösste, I' das kleinste von den Trägheitsmomenten des Querschnitts in Beziehung auf alle in seiner Ebene durch O gehende Axen, und es kann deshalb der Körper am leichtesten in der Ebene XY, am wenigsten leicht in der Ebene XZ gebogen werden. Man kann daher sagen, dass die wirkliche Biegungsebene stets zwischen der Kraftebene und der Ebene der leichtesten Biegung liegt, und zwar nach der letzteren um so mehr abgelenkt wird, je mehr die Dimen-

sionen des Querschnitts in zwei auf einander senkrechten Richtungen, und somit auch die Hauptträgheitsmomente I und I', verschieden sind. Wenn der Körper eine sehr dünne Platte ist, so kann der Quotient $\frac{I}{I'}$ so gross sein, dass β nahe $= 90^0$ ist, während α nahe $= 0$ ist, wovon man sich leicht durch einen Versuch mit einem eingeklemmten Blechstreifen überzeugen kann.

Der sehr geringen Biegung wegen liegt der Angriffspunkt A von P nur sehr wenig ausserhalb OX, und zudem ist diese Kraft mit der Ebene YZ fast parallel. Bezeichnet deshalb

p die Entfernung AO,

M das Moment des Kräftepaares, welches man erhält, wenn man die Kraft P von A nach O überträgt,

so kann $M = Pp$ gesetzt und die Ebene XOA', also auch die Kraftebene, als die Ebene des Paares M betrachtet werden. Sind dann ferner

y, z die Coordinaten irgend eines Punktes des durch O gelegten Querschnitts in Beziehung auf die Axen OY, OZ,

so ist die Bedingung dafür, dass die specifische absolute oder rückwirkende Spannung einer Längenfaser des Balkens in irgend einem Punkte dieses Querschnitts höchstens $= k$ ist, die folgende:

$$k = M \cdot \max.\left(\frac{z \cos \alpha}{I} + \frac{y \sin \alpha}{I'}\right) \Big\} \quad \ldots \ldots \quad 2).$$

Sie ist die Bedingungsgleichung dafür, dass in irgend einem Punkte des ganzen Balkens die specifische Spannung einer Längenfaser höchstens $= k$ ist, wenn man unter M das grösste unter den Momenten der Kräftepaare versteht, welche man erhält, indem man P nach allen Punkten O der elastischen Linie überträgt. Unter l die Länge des Balkens von der Befestigungsstelle bis zu dem Angriffspunkt der Kraft verstanden, ist dieses grösste Moment im vorliegenden Falle offenbar $= P \cdot l$.

2 Indem wir ferner von den beiden zu Anfang dieses Paragraphen bemerkten bisherigen Voraussetzungen zugleich abstrahiren, nehmen wir an, dass auf einen Balken von beliebigem Querschnitt beliebig viele Kräfte wirken, welche seine Axe in beliebigen Punkten rechtwinkelig schneiden, während im Uebrigen die Richtungen derselben beliebig sind. $P P_1 P_2 \ldots$ seien diejenigen dieser Kräfte, welche von einem Ende des Balkens an gerechnet bis zu irgend einem Punkte O der Axe angreifen, wobei die Widerstandskräfte der etwaigen Stützpunkte mitinbegriffen sind; $p\ p_1\ p_2 \ldots$ seien die Entfernungen ihrer Angriffspunkte vom Punkte O. Man denke diese Kräfte sämmtlich von ihren respectiven Angriffspunkten nach dem Punkte O übertragen, und die dadurch erhaltenen Kräftepaare, deren Momente $= Pp$, $P_1 p_1 \ldots$ sind, zu einem resultirenden Paar vereinigt. Während im Uebrigen die vorigen Bezeichnungen beibehalten werden, bedeute jetzt M das Moment des resultirenden Paares und OA' (*Fig. 16*) den Schnitt seiner Ebene, die wie zuvor als durch OX gehend angenommen werden kann, mit der Ebene YZ des durch O

gehenden Querschnitts. Wenn hier unter der Biegungsebene die anschliessende Ebene XOB' für den Punkt O der elastischen Linie verstanden wird, so ist deren Neigung β gegen die Ebene XOZ wieder durch die Gleichung 1) bestimmt; weil aber jetzt die durch den Winkel α bestimmte Richtung der Ebene des resultirenden Paares mit der Lage des Punktes O im Allgemeinen stetig veränderlich ist, so gilt dasselbe auch von der Biegungsebene, d. h. die elastische Linie ist im Allgemeinen doppelt gekrümmt. Einfach gekrümmt ist sie nur dann, wenn die Kräfte $P\,P_1\,P_2\ldots$ parallel sind.

Mit Rücksicht auf die modificirte Bedeutung des Buchstabens M drückt die Gleichung 2) noch ebenso wie zuvor den Umstand aus, dass die grösste Spannung in einem Punkte des durch O gehenden Querschnitts $= k$ ist. Um aber auszudrücken, dass k die grösste Spannung in irgend einem Punkte des ganzen Balkens ist, genügt es jetzt im Allgemeinen nicht mehr, in jener Gleichung unter M das Moment des grössten resultirenden Kräftepaares in Beziehung auf irgend einen Punkt der elastischen Linie zu verstehen, sondern man muss, weil auch α zugleich mit M sich ändert, die Gleichung setzen:

$$k = \max. \left[M \cdot \left(\frac{z \cos\alpha}{I} + \frac{y \sin\alpha}{I'}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad 3).$$

Nur wenn die Kräfte $P\,P_1\,P_2\ldots$ parallel sind und somit α constant ist, darf man diese Bedingungsgleichung in die folgende:

$$k = \max. M \cdot \max. \left(\frac{z \cos\alpha}{I} + \frac{y \sin\alpha}{I'}\right) \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

auflösen; und man findet dann den Bruchpunkt, d. h. denjenigen Punkt der elastischen Linie, in Beziehung auf welchen M am grössten ist, sowie diesen grössten Werth von M selbst auf dieselbe Weise, wie es in den vorhergehenden Paragraphen an mehreren Beispielen gezeigt worden ist.

Wenn die zuvor unter 1. referirten Gesetze für den Fall, dass nur eine einzelne Kraft P auf den einerseits befestigten Balken wirkt, als richtig erkannt worden sind, so bedarf die Verallgemeinerung derselben unter 2. für den Fall beliebig vieler Kräfte keiner Rechtfertigung weiter. Es sei also im ersten Fall σ die specifische positive oder negative (absolute oder rückwirkende) Spannung in einem beliebigen Punkt m des Querschnitts YZ (*Fig. 16*), so erfordert, wenn man die an den Punkt O versetzte Kraft P mit Rücksicht auf die hier beibehaltene fünfte Voraussetzung des §. 7 vernachlässigt, das Gleichgewicht des gebogenen Balkens: 1) dass die Resultante der an den Punkt O versetzten parallelen Elementarspannungen $\sigma \cdot dq = 0$, 2) dass das durch die Uebertragung dieser Spannungen hervorgehende Paar mit dem von der äusseren Kraft P herrührenden Paar vom Momente M im Gleichgewicht ist. Da es hier aber nicht wie in §. 7 wegen der dort vorausgesetzten Symmetrie des Querschnitts *a priori* gewiss ist, dass das resultirende Paar der Spannungen mit dem von der äusseren Kraft herrührenden Paare in eine Ebene fällt, so muss dieser Umstand ausser der erforderlichen Gleichheit der Momente beider durch eine besondere dritte Gleichung ausgedrückt werden, was auch dadurch geschehen kann, dass man beide Paare in Seitenpaare zerlegt denkt, die in die Coordinatenebenen XY und XZ fallen, und die Momente der betreffenden Seitenpaare einzeln einander gleichsetzt. Sonach sind die Gleichgewichtsbedingungen des gebogenen Balkens hier die folgenden:

$$\int\sigma\cdot dq = 0;\quad \int\sigma\cdot dq\cdot z = M\cdot\cos\alpha;\quad \int\sigma\cdot dq\cdot y = M\cdot\sin\alpha \Big\}\ \text{a)},$$

welche an die Stelle der beiden Gleichungen a) des §. 7 treten. Mit Rücksicht auf die gleichfalls beibehaltene dritte Voraussetzung jenes Paragraphen ist ferner auch hier die specifische positive oder negative Ausdehnung λ und somit die specifische Spannung $\sigma = E\lambda$ in allen Punkten jeder auf der Biegungsebene senkrechten geraden Linie des Querschnitts YZ gleich gross; und wenn man hier wie dort mit λ_0 die specifische Ausdehnung in den Punkten der auf der Biegungsebene senkrechten geraden Linie ON (*Fig. 16*), mit ρ den Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte O bezeichnet, so findet man durch dieselbe Betrachtung wie dort für die specifische Ausdehnung λ eines Punktes m, der sich in dem (positiven oder negativen) Abstand η von ON befindet, den Ausdruck:

$$\lambda = \lambda_0 + (1+\lambda_0)\frac{\eta}{\rho};\quad \text{folglich}\quad \sigma = E\left[\lambda_0 + (1+\lambda_0)\frac{\eta}{\rho}\right].$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks von σ in der ersten der Gleichungen a) gelangt man ferner ebenso wie in §. 7 zu dem Schluss, dass $\lambda_0 = 0$, also ON die neutrale Axe des Querschnitts ist. Hiernach ist einfacher

$$\sigma = \frac{E\eta}{\rho},$$

oder, wie sich leicht aus der Figur zu erkennen giebt,

$$\sigma = \frac{E}{\rho}(z\cdot\cos\beta + y\cdot\sin\beta),$$

so dass die beiden letzten der obigen Gleichungen a) nun übergehen in:

$$\begin{aligned} M\cdot\cos\alpha &= \int\frac{E}{\rho}(z\cos\beta + y\sin\beta)\cdot dq\cdot z \\ &= \frac{E}{\rho}\cos\beta\int z^2.\,dq + \frac{E}{\rho}\sin\beta\int yz\cdot dq \\ M\cdot\sin\alpha &= \int\frac{E}{\rho}(z\cos\beta + y\sin\beta)\cdot dq\cdot y \\ &= \frac{E}{\rho}\cos\beta\int yz\cdot dq + \frac{E}{\rho}\sin\beta\int y^2.\,dq, \end{aligned}$$

oder, weil OY und OZ Hauptaxen des Querschnitts für den Punkt O sind, welche Voraussetzung bekanntlich durch die Gleichung:

$$\int yz\cdot dq = 0$$

analytisch ausgedrückt wird, in:

$$\left.\begin{aligned} M\cdot\cos\alpha &= \frac{EI}{\rho}\cos\beta \\ M\cdot\sin\alpha &= \frac{EI'}{\rho}\sin\beta \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \text{b)}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I}{I'}\operatorname{tg}\alpha,$$

d. i. die Relation 1). Auch erhält man aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\cos\beta = \frac{M}{E}\cdot\frac{\cos\alpha}{I}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\sin\beta = \frac{M}{E}\cdot\frac{\sin\alpha}{I'},$$

indem man sie quadrirt, addirt und alsdann die Quadratwurzel auszieht:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\cos\alpha^2}{I^2} + \frac{\sin\alpha^2}{I'^2}} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{c)},$$

durch welche letztere Gleichung die Gestalt der elastischen Linie charakterisirt ist. — Ferner ist die Bedingung dafür, dass die specifische Spannung

$$\frac{E}{\rho}(z\cos\beta + y\sin\beta)$$

in irgend einem Punkte des durch O gehenden Querschnitts höchstens $= k$ sei, die folgende:

$$k = \max.\frac{E}{\rho}(z\cos\beta + y\sin\beta),$$

oder, weil wegen b)

$$\frac{E\cos\beta}{\rho} = \frac{M\cos\alpha}{I};\quad \frac{E\sin\beta}{\rho} = \frac{M\sin\alpha}{I'}$$

ist,

$$k = M\cdot\max.\left(\frac{z\cos\alpha}{I} + \frac{y\sin\alpha}{I'}\right),$$

welches die Gleichung 2) ist.

Es sei z. B. der Querschnitt des Balkens ein Rechteck $pqrs$, g dessen kleinere, h dessen grössere Seite. Dann ist die Hauptaxe OY (*Fig. 16 a*), in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment I am grössten ist, mit den kleineren Seiten g, die andere OZ, in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment I' am kleinsten ist, mit den grösseren Seiten h parallel. Und zwar ist:

$$I = \frac{gh^3}{12};\quad I' = \frac{g^3h}{12}\quad \text{(siehe §. 7)},$$

folglich der Gleichung 1) zufolge:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h^2}{g^2}\cdot\operatorname{tg}\alpha \Bigg\} \quad \ldots\ldots \quad \text{d)}.$$

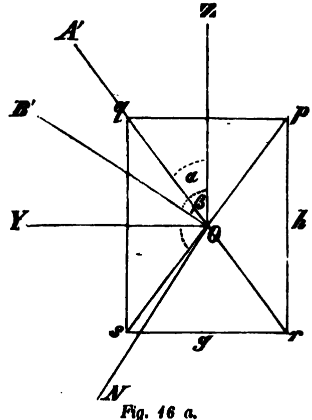


Fig. 16 a.

Wenn z. B. die Kraftebene, wie *Fig. 16 a* darstellt, den Querschnitt in einer Diagonale qr schneidet, so dass

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{h}$$

ist, so wird:

$$\text{tg.}\beta = \frac{h}{g} = \text{cotg}\,\alpha,$$

also

$$\beta \text{ oder } YON = 90^0 - \alpha = YOq = YOs,$$

d. h. es fällt alsdann die neutrale Axe mit der andern Diagonale ps zusammen. Lässt man die Seite g kleiner und kleiner werden, so nähert sich OA' mehr und mehr der Axe OZ, OB' der Axe OY, so dass in der Grenze die Abweichung der Biegungsebene von der Kraftebene in der That 90^0 beträgt.

Der Ausdruck

$$\frac{z \cos\alpha}{I} + \frac{y \sin\alpha}{I'}$$

erhält für irgend einen bestimmten Querschnitt des rechteckigen Balkens offenbar dann den grössten absoluten Werth, wenn entweder $y = \frac{g}{2}$, $z = \frac{h}{2}$, oder $y = -\frac{g}{2}$, $z = -\frac{h}{2}$ ist, d. h. es ist, wie gross auch der spitze Winkel α sein mag, die specifische Spannung stets in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten q und r am grössten. Die Gleichung, welche ausdrückt, dass in einem Querschnitt, für welchen das resultirende Kräftepaar das Moment M und seine Ebene gegen die Ebene XZ den Neigungswinkel α hat, die grösste specifische Spannung $= k$ ist, ist hiermit hier folgende:

$$k = M \cdot \left(\frac{\frac{h}{2}\cos\alpha}{\frac{gh^3}{12}} + \frac{\frac{g}{2}\sin\alpha}{\frac{g^3h}{12}} \right) = M \cdot \frac{6}{gh}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\sin\alpha}{g}\right) \Bigg\} \quad \ldots \text{e).}$$

Soll k die grösste specifische Spannung im ganzen Balken sein, so muss

$$k = \max.\left[M \cdot \frac{6}{gh}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\sin\alpha}{g}\right)\right] \cdot \Big\} \quad \ldots\ldots \text{f)}$$

sein, oder, wenn alle Kräfte parallel sind, also α constant ist:

$$k = \frac{6}{gh}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\sin\alpha}{g}\right) \cdot \max. M \Big\} \quad \ldots\ldots \text{g).}$$

Wenn z. B. der Balken am einen Ende befestigt ist, während im Abstande l von demselben die einzelne Kraft P angreift, so ist:

$$\max. M = P \cdot l,$$

wenn er beiderseits auf Stützen liegt, und die Kraft P im Abstande a vom einen, b vom andern Ende angreift:

$$\max. M = P \cdot \frac{ab}{l} \Big\} \quad \ldots \text{[§. 10 8)],}$$

wenn er dagegen beiderseits befestigt und $a > b$ ist:

$$\max. M = P\frac{a^2 b}{l^2} \Big\} \quad \ldots \text{[§. 14 2)].}$$

1854. DE SAINT-VENANT *Inst.* I. sect. p. 396*.

IV. Schubelasticität und Festigkeit.

§. 17.

Wenn man die von einem beliebigen Querschnitt an bis zu einem Ende auf einen prismatischen Körper wirkenden, seine Axe rechtwinkelig schneidenden, übrigens beliebig gerichteten Kräfte, mit Einschluss derjenigen, welche etwa vorhandene Stützpunkte ersetzen, auf den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts übertragen, alsdann die übertragenen Kräfte zu einer resultirenden Kraft R, die aus der Uebertragung hervorgehenden Kräftepaare aber zu einem resultirenden Paar M zusammengesetzt denkt, so ist auch bei der Verallgemeinerung der Theorie der relativen Festigkeit im vorigen Paragraphen ebenso wie in §. 7 von der Wirkung der Kraft R abstrahirt und nur die gewöhnlich bei weitem überwiegende Wirkung des Paares M in Betracht gezogen worden, welche in der Ausdehnung eines Theils und Verkürzung eines andern Theils der Längenfasern und der dadurch bedingten Biegung des Körpers besteht. Wenn aber die Länge des letzteren abnimmt, während die auf ihn wirkenden Kräfte dieselbe Grösse und Richtung behalten, so nimmt mit kleiner werdendem Hebelarm das Moment jedes einzelnen und somit auch das Moment M des resultirenden Paares beständig ab, während R unverändert bleibt. Weil andererseits die durch das Paar M hervorgebrachten Spannungen der äussersten Längenfasern und die Biegung des Balkens hauptsächlich von seiner Dicke, d. h. der grössten parallel mit der Biegungsebene gemessenen Querdimension, abhängig sind, und zwar beide, Spannung und Biegung, mit zunehmender Dicke abnehmen, so ist ersichtlich, dass die Vernachlässigung der Kraft R wesentlich fehlerhaft sein würde, wenn die Länge des Körpers im Verhältniss zur Dicke nicht einigermassen beträchtlich ist. Die Wirkung dieser Kraft R, von welcher der Geringfügigkeit der Biegung wegen angenommen werden kann, dass sie in den betrachteten Querschnitt fällt, besteht aber offenbar darin, dass sie denselben gegen einen folgenden unendlich nahe liegenden Querschnitt verschiebt, respective den Körper in dem gedachten Querschnitt abschiebt, abdrückt, falls sie eine gewisse Grösse überschreitet und nicht schon vorher eine anderweitige Zerstörung stattgefunden hat. Den Widerstand, welchen ein Körper vermöge seiner Elasticität überhaupt einer derartigen Verschiebung entgegensetzt, wollen wir insbesondere Schubelasticität, den Widerstand gegen die Trennung seiner Theile durch Abschiebung dagegen Schubfestigkeit nennen.

Wenn die Länge des zuvor gedachten prismatischen Körpers so weit abnimmt, dass sie selbst im Verhältniss zur Dicke unbedeutend wird, so darf gar umgekehrt das Paar M gegen die Kraft R vernachlässigt werden. Solche Fälle, in welchen es die Schubelasticität, respective Festigkeit ausschliesslich ist, die bei der Beurtheilung der Haltbarkeit der Construction in Betracht kommt, sind im Bau- und Maschinenwesen nicht selten. Sie ist es z. B., mit Rücksicht auf welche an den Enden der Dachbalken, wo die Dachsparren darin eingezapft sind, die erforderliche Länge und Breite des Zapfens und des Brüstungsholzes vor dem Zapfenloche bestimmt werden

muss, damit durch den Horizontalschub des durch das Dach belasteten Sparrens weder der Zapfen ab-, noch das Brüstungsholz hinausgeschoben werden kann; sie ist ferner massgebend bei Beurtheilung der erforderlichen Betriebskraft und Constructionsverhältnisse der in den Maschinenwerkstätten vielfach im Gebrauch befindlichen Blechscheeren und Durchstossmaschinen, durch welche dicke Bleche zugeschnitten und Nietlöcher in dieselben eingedrückt werden; eine wichtige Anwendung findet sie auch bei der Berechnung von Keilen und Bolzen, die zur Verbindung von Maschinentheilen dienen, u. s. w. In allen diesen Fällen würde es einfach genügen, diejenige mit dem Bruchquerschnitt oder der Anhaftungsfläche parallel wirkende Kraft zu kennen, durch welche bei gegebener Grösse dieser Fläche die Grenze der vollkommenen Elasticität erreicht, oder auch nur diejenige, durch welche die Schubfestigkeit überwunden wird. — Wegen der allgemeineren Bedeutung aber, welche die Schubelasticität für die Untersuchung solcher Fälle hat, wo in verschiedenen Punkten eines Querschnitts verschiedene Verschiebungen (wie z. B. bei der Torsion eines prismatischen Körpers), oder dieselben gleichzeitig mit Ausdehnungen oder Verkürzungen auftreten (wie in dem Beispiel des auf relative Elasticität in Anspruch genommenen Balkens, von welchem wir oben ausgegangen sind), wegen ihrer Bedeutung insbesondere für die Analyse der zusammengesetzteren Elasticitätsäusserungen eines beliebigen Körpers unter der Einwirkung beliebiger Kräfte, ist es nöthig, dieselbe von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu betrachten und zuvörderst zur Vereinfachung der Ausdrucksweise und zur Fixirung der Begriffe mehrere Definitionen aufzustellen, welche denjenigen analog sind, die wir in §. 1 in Bezug auf absolute und rückwirkende Elasticität gegeben haben.

Denken wir uns in einem Körper, der sich im natürlichen Gleichgewichtszustande, d. h. in Ruhe und von äusseren Kräften (streng genommen auch von seiner eigenen Schwere, von der wir bei diesen Untersuchungen stets als von einer untergeordneten Belastung abstrahiren) entblösst befindet, zwei unendlich nahe Parallelebenen F und F', und in denselben zwei materielle Punkte A und A' des Körpers, deren Verbindungslinie AA' auf den Ebenen senkrecht ist. Wird der Körper durch irgend welche Kräfte belastet und ist er unter ihrer Einwirkung von Neuem ins Gleichgewicht gekommen, so können die Ebenen F und F', falls sie materiell, d. h. als die geometrischen Oerter der ursprünglich darin befindlich gewesenen materiellen Punkte gedacht werden, im Allgemeinen sowohl eine geringe Entfernung oder Annäherung, als Verschiebung und Verdrehung, als auch eine geringe Krümmung erfahren haben. Wenn man den neuen Ort des materiellen Punktes A' auf die materielle Fläche F projicirt, so wird also die Projection im Allgemeinen nicht in den materiellen Punkt A, sondern in einen andern Punkt B dieser Fläche fallen; die Entfernung AB heisst dann die totale Verschiebung, welche die Ebenen F und F' in den entsprechenden Punkten A und A' gegen einander erfahren haben. Ebenso wie in verschiedenen Punkten dieser Ebenen ihre Entfernung oder Annäherung verschieden gross sein kann, so kann ihre gegenseitige Verschiebung in denselben sowohl verschieden gross, als auch verschieden gerichtet sein, was man leicht einsieht, wenn man sich nur diese Verschiebungen lediglich oder zum Theil durch eine Verdrehung der

Ebenen gegen einander verursacht denkt. Der Quotient, welcher durch Division der totalen Verschiebung AB durch die im Verhältniss dazu stets sehr grosse ursprüngliche Entfernung AA' beider Ebenen erhalten wird, soll die specifische Verschiebung derselben in den Punkten A und A' in der Richtung AB genannt und im Allgemeinen mit dem Buchstaben γ bezeichnet werden.

Wenn man den Körper in dem verschobenen Gleichgewichtszustande, in welchem er sich unter der Einwirkung der äusseren Kräfte befindet, in der Fläche F zerschnitten denkt, so wird man, um den einen oder den andern der beiden Theile, etwa denjenigen, welcher die Fläche F' enthält, trotz der Abtrennung in unverändertem Gleichgewichtszustande zu erhalten, in den verschiedenen Elementen der Fläche F 1) solche normale Kräfte anbringen müssen, welche die zur Fläche F normal gerichteten Fasern, deren Querschnitte jene Flächenelemente sind, in ihrem vorherigen Zustand der Ausdehnung oder der Verkürzung erhalten, 2) aber auch in den bezüglichen Verschiebungsrichtungen solche tangentiale Kräfte, welche zusammengenommen die Flächen F und F' in ihrem vorherigen Zustand der Verschiebung erhalten. Letztere Kräfte werden wir in Zukunft Tangentialspannungen nennen; erstere, welche wir bisher schlechtweg Spannungen genannt haben, nämlich die Spannungen der oben erwähnten Fasern, werden wir da, wo es wünschenswerth ist, ihre Verschiedenartigkeit im Vergleich mit den Tangentialspannungen ausdrücklich hervorzuheben, auch wohl Normalspannungen nennen. Diejenige Kraft insbesondere, welche bei der oben gedachten Zerschneidung des Körpers in einem den Punkt A enthaltenden unendlich kleinen Element der Fläche F in der Richtung BA angebracht werden muss, wird die totale Tangentialspannung dieses Flächenelementes heissen. Der Quotient, welcher durch Division der letzteren durch den Inhalt des Flächenelementes erhalten wird, muss dann die im Punkte A der Ebene F in der Richtung AB oder BA stattfindende specifische Tangentialspannung genannt werden. Ob dieselbe in der Richtung AB oder BA wirksam zu denken ist, hängt natürlich davon ab, welchen der beiden von einander abgetrennten Körpertheile man in Betracht ziehen und durch diese äusserlich angebrachten Spannungen im Gleichgewicht erhalten will. Eine specifische Tangentialspannung werden wir im Allgemeinen mit τ bezeichnen.

So lange die Spannung τ eine gewisse Grösse nicht überschreitet, wird die entsprechende Verschiebung bei Wegnahme der Belastung vollkommen wieder verschwinden. Dieser Grenzwerth τ' der specifischen Tangentialspannung ist das dem Punkte A und der Verschiebungsrichtung AB der Ebene F entsprechende Maass der vollkommenen Schubelasticität des Körpers. Derjenige Grenzwerth derselben, bei welchem eine Trennung der Körpertheile im Punkte A durch Abschiebung längs der Ebene F in der Richtung AB stattfindet, ist das entsprechende Maass der Schubfestigkeit. Bei einem homogenen Körper sind beide Maasse nur von der Richtung der verschobenen Ebenen und deren Verschiebungsrichtung abhängig; bei einem isotropen Körper sind sie auch hiervon unabhängig, so dass man schlechtweg von dem Maasse der vollkommenen Schubelasticität und der Schubfestigkeit eines solchen sprechen kann.

Die mathematische Theorie der Molecularwirkungen der Körper führt zu dem den beiden Elasticitätsgesetzen des §. 2 entsprechenden Gesetze, dass die specifische Verschiebung zu der bezüglichen specifischen Tangentialspannung bis zu einer gewissen Grenze ein constantes Verhältniss hat, und es wird dasselbe durch die Vergleichung der beobachteten Formänderungen eines Körpers unter der Einwirkung solcher Kräfte, durch welche die Schubelasticität möglichst rein und ausschliesslich hervorgerufen wird, mit den auf Grund jenes Gesetzes theoretisch berechneten Formänderungen mit hinlänglicher Genauigkeit bestätigt, indem man die dabei sich herausstellenden Abweichungen zumeist den bei der Theorie unberücksichtigt gebliebenen Nebenumständen zuschreiben darf. Den hiernach constanten Quotienten aus der specifischen Tangentialspannung τ durch die entsprechende specifische Verschiebung γ, welcher bei einem homogenen Körper sowohl für eine andere Richtung der verschobenen Ebenen F, als auch für eine andere Verschiebungsrichtung AB derselben ein anderer sein kann, werden wir den bezüglichen Modulus der Schubelasticität des homogenen Körpers, bei einem isotropen Körper also, wo jene Abhängigkeit aufhört, schlechtweg den Modulus der Schubelasticität nennen und ihn, wie es üblich ist, mit dem Buchstaben G bezeichnen. Der bisher schlechtweg so genannte Elasticitätsmodulus E soll nunmehr bestimmter da, wo es der Deutlichkeit wegen erforderlich erscheint, der Modulus der absoluten und rückwirkenden oder kürzer blos der Modulus der absoluten Elasticität heissen. Aus der oben erwähnten allgemeinen mathematischen Theorie der Molecularwirkungen eines unter der Einwirkung beliebiger Kräfte im Gleichgewicht befindlichen elastischen Körpers ergiebt sich, falls derselbe als isotrop vorausgesetzt wird, zwischen den beiden Constanten E und G die folgende einfache Beziehung:

$$G = \frac{2}{5} E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

Dass übrigens die in diesem Paragraphen betrachteten Verschiebungen sich stets auf Ausdehnungen und Verkürzungen in gewissen Richtungen zurückführen lassen, wie es in §. 2 behauptet wurde, dass also die absolute und rückwirkende Elasticität, welche wie entgegengesetzte Grössen wesentlich zusammengehören, in der That die alleinige einfache oder elementare Aeusserungsweise der Elasticität darstellen, dass also schliesslich auch die durchgehende Hauptaufgabe dieses Kapitels, nämlich die Bestimmung der bei technischen Constructionen vorkommenden einzelnen Theile gemäss der Forderung der Nichterreichung der Elasticitätsgrenze überhaupt, trotz etwaiger Verschiebungen noch immer dadurch gelöst wird, dass man die specifische positive oder negative Ausdehnung λ in keinem Punkte und in keiner Richtung eine gewisse Grenze λ' erreichen lässt, ergiebt sich durch eine einfache Betrachtung. Denkt man sich nämlich zwei unendlich nahe materielle Parallelebenen F und F' eines Körpers und alle materiellen Punkte der einen mit allen der andern durch mathematische gerade Linien verbunden, und stellt man sich vor, diese Ebenen würden, um die in Rede stehende Beziehung rein zu erhalten, so gegen einander verschoben, dass ohne Aenderung ihrer ebenen Beschaffenheit, ihres Parallelismus und ihres Abstandes die spe-

cifische Verschiebung γ in allen Punkten gleich gross und gleich gerichtet ist, so ist klar, dass dadurch alle gedachten Verbindungslinien im Allgemeinen eine positive oder negative Längenänderung erfahren müssen, deren relative Grösse nur von ihrer Richtung abhängig ist. Von den Ebenen F und F' mag erstere als die feste, letztere als die verschobene gedacht werden; A sei ein Punkt der ersteren, B ein Punkt der letzteren, welcher durch die Verschiebung nach B' rückt. Wegen der Geringfügigkeit der Verschiebung BB' im Verhältniss zu der Entfernung der Ebenen ist der Winkel BAB' sehr klein, weshalb die Längenänderung der Verbindungslinie AB durch die Projection von BB' auf AB oder AB' dargestellt werden kann. Ist nun AX eine im Punkte A auf der Ebene F senkrechte gerade Linie, und denkt man sich den Kegelmantel, welcher bei Umdrehung des Winkels XAB um AX durch die gerade Linie AB erzeugt wird, so erfahren von den Seiten dieses Kegelmantels diejenigen die grösste totale, mithin auch die grösste specifische Längenänderung, welche mit der Verschiebungsrichtung den kleinsten Winkel bilden. Diese sind aber diejenigen, für welche dieser Winkel ihr Neigungswinkel gegen die Ebenen F und F' ist, und welche in den Durchschnitten des Kegelmantels mit derjenigen Ebene H erhalten werden, die durch AX gehend mit der Verschiebungsrichtung parallel ist. Die Längenänderung der einen AB von diesen beiden in der Ebene H liegenden Linien ist positiv, die der andern AC ist negativ. Fragt man sich nun, in welchen unter allen möglichen von A auslaufenden Linien die specifische Verlängerung oder Verkürzung am allergrössten ist, so hat man sie nur in der Ebene H zu suchen, und eine einfache Betrachtung lehrt, dass sie diejenigen beiden auf einander senkrechten Linien AB und AC dieser Ebene sind, welche auf der einen und der andern Seite unter einem Winkel von 45^0 gegen AX geneigt sind. Die entsprechende grösste specifische Längenänderung λ selbst findet man $= \frac{\gamma}{2}$. Indem man nun annehmen muss, dass die Grenze der vollkommenen Schubelasticität des isotropen Körpers dadurch erreicht wird, dass die specifische positive oder negative Ausdehnung dieser mit der Ebene H parallelen und unter 45^0 gegen die materiellen Ebenen F und F' geneigten Verbindungslinien den der Elasticitätsgrenze entsprechenden Grenzwerth λ' erreicht, so findet zwischen ihm, falls er in Bezug auf positive ebenso gross, als in Bezug auf negative Ausdehnung (Verkürzung) angenommen werden darf, und der der Elasticitätsgrenze entsprechenden specifischen Verschiebung γ' die Relation statt:

$$\gamma' = 2\lambda' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2).$$

Wenn man ferner annimmt, dass die Elasticitätsgesetze, worauf die Definition der Constanten E und G beruht, bis zu der in Rede stehenden Grenze richtig bleiben, so erhält man aus den Gleichungen 1) und 2) die fernere Relation:

$$\tau' = \frac{4}{5}\sigma' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Bei einem isotropen Körper ist also der Modulus G der Schubelasticität $= \frac{2}{5}$ vom Modulus E der absoluten Elasticität, und die

der Elasticitätsgrenze entsprechende specifische Verschiebung doppelt so gross, als die dieser Grenze entsprechende specifische Ausdehnung; folglich die höchstens zulässige Tangentialspannung $= \frac{4}{5}$ von der bei gleicher Sicherheit und fehlender Seitenspannung zulässigen Normalspannung.

Was die allgemeinen Formeln der Molecularmechanik betrifft, aus welchen die referirte Relation 1) abgeleitet werden kann, so müssen wir uns hier darauf beschränken, dieselben historisch mitzutheilen, ihre Bedeutung zu erklären und die Art und Weise jener Ableitung zu zeigen. In Betreff ihrer rein theoretischen Entwickelung, welche einen Theil einer in sich abgeschlossenen umfangreichen Disciplin ausmacht, muss auf die bezügliche theoretische Abtheilung dieses Werkes oder auf die unten citirten Abhandlungen verwiesen werden.

Wir setzen einen elastischen Körper voraus, der aus dem natürlichen, d. h. dem ohne Einwirkung äusserer Kräfte stattfindenden Gleichgewichtszustande durch beliebige Kräfte in einen neuen Gleichgewichtszustand versetzt wird, in welchem die materiellen Punkte des Körpers relative Verrückungen erlitten haben, die im Verhältniss zu ihren ursprünglichen Distanzen sehr klein sind. Der Körper sei einstweilen blos homogen (in allen Punkten nach denselben Richtungen hin physikalisch gleich beschaffen), habe aber drei auf einander senkrechte Elasticitätsaxen, d. h. es mögen durch jeden Punkt P des Körpers drei auf einander senkrechte gerade Linien von für alle Punkte gleichen Richtungen gezogen werden können, von solcher Eigenschaft, dass, wenn sie mit den Hauptaxen eines um P als Mittelpunkt construirten Ellipsoids zusammenfallen, die physikalische Beschaffenheit und somit auch die Elasticität des Körpers im Punkte A in den Richtungen von je acht gleichen Radien dieses Ellipsoids gleich ist. In Bezug auf drei Coordinatenaxen, welche mit den Elasticitätsaxen eines beliebig gewählten materiellen Punktes O des Körpers zusammenfallen, seien nun

x, y, z die ursprünglichen, d. h. im natürlichen Gleichgewichtszustande genommenen Coordinaten eines beliebigen andern materiellen Punktes P des Körpers;

ξ, η, ζ die mit den bezüglichen Coordinatenaxen parallelen, im Verhältniss zu x, y, z sehr kleinen Verrückungen des Punktes P im neuen Gleichgewichtszustande unter der Einwirkung der belastenden Kräfte;

p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} die nach den Axen genommenen Componenten des auf die Flächeneinheit bezogenen oder specifischen inneren Drucks, welcher in diesem neuen Zustande im Punkte P einer auf der Axe OX senkrechten Ebene auf dieselbe durch die Reaction der Molecularkräfte ausgeübt wird; desgleichen

p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} die analogen Componenten des specifischen inneren Drucks auf eine zur Axe OY senkrechte Ebene im Punkte P;

p_{zx}, p_{zy}, p_{zz} die analogen Componenten des Drucks auf eine zur Axe OZ senkrechte Ebene im Punkte P;

A_x, A_y, A_z constante Coefficienten, welche nur von der physikalischen Beschaffenheit in Bezug auf die bezüglichen Richtungen OX, OY, OZ, endlich

A_{yz}, A_{xz}, A_{xy} andere constante Coefficienten, welche gleichzeitig von der physikalischen Beschaffenheit in Bezug auf je zwei der drei Richtungen OX, OY, OZ, nämlich der bezüglichen Richtungen OY und OZ, OX und OZ, OX und OY abhängen.

Alle diese Grössen stehen bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung in den folgenden sechs allgemeinen theoretischen Beziehungen zu einander:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= 3A_x \cdot \frac{d\xi}{dx} + A_{xy} \cdot \frac{d\eta}{dy} + A_{xz} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \\ p_{yy} &= A_{xy} \cdot \frac{d\xi}{dx} + 3A_y \cdot \frac{d\eta}{dy} + A_{yz} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \\ p_{zz} &= A_{xz} \cdot \frac{d\xi}{dx} + A_{yz} \cdot \frac{d\eta}{dy} + 3A_z \cdot \frac{d\zeta}{dz} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{a).}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} &= p_{zy} = A_{yz} \cdot \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) \\ p_{xz} &= p_{zx} = A_{xz} \cdot \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right) \\ p_{xy} &= p_{yx} = A_{xy} \cdot \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{b).}$$

Um die Bedeutung dieser Gleichungen zu erklären, wollen wir im natürlichen Gleichgewichtszustande des Körpers vom Punkte P (*Fig. 17*) als Eckpunkt aus ein unendlich kleines rechtwinkeliges Parallelipipedum, dessen mit den Axen OX, OY, OZ parallele Kanten PA, PB, PC respective $= dx$, dy, dz sind, construirt denken, und während wir dasselbe als den geometrischen Ort der darin befindlichen materiellen Punkte voraussetzen, seine Formänderung sowie die in ihm hervorgerufenen Spannungen im neuen Gleichgewichtszustande in Betracht ziehen. — Zunächst ist ersichtlich, dass die Druckcomponente p_{xx} nichts Anderes bedeutet, als die specifische Normalspannung, welche im Punkte P, oder in der ganzen unendlich kleinen Seitenfläche BPC, oder auch in dem ganzen Parallelipipedum in der Richtung PA stattfindet; dass ferner p_{xy} und p_{xz} specifische Tangentialspannungen sind, welche im Punkte P der Seitenfläche BPC, oder in allen Punkten derselben, oder endlich in allen Punkten aller damit parallelen Durchschnitte des ganzen Parallelipipedums in den bezüglichen Richtungen PB und PC stattfinden. Analoge Bedeutungen in Bezug auf die Seitenflächen APC und APB haben die Grössen p_{yy}, p_{yx}, p_{yz} und p_{zz}, p_{zx}, p_{zy}. In Gemässheit unserer bisherigen Bezeichnungsweise und mit Rücksicht darauf, dass den Gleichungen b) zufolge diejenige specifische Tangentialspannung, welche in einem Punkte P einer auf einer Elasticitätsaxe senkrechten Ebene in der Richtung einer der andern Axen stattfindet, ebenso gross ist, wie diejenige, welche in demselben Punkte P einer auf dieser zweiten Axe senkrechten Ebene in der Richtung der ersten Axe stattfindet, wollen wir daher in den Gleichungen a) die Grössen

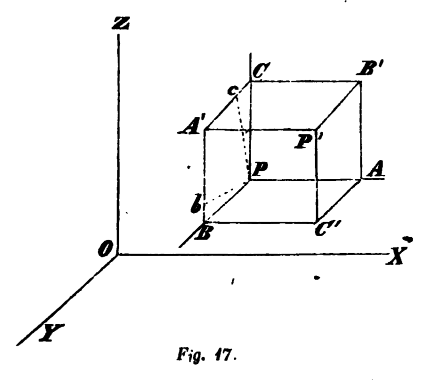


Fig. 17.

$$p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz} \quad \text{respective} = \sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$$

und in den Gleichungen b) die Grössen

$$p_{yz} \text{ und } p_{zy}, \; p_{xz} \text{ und } p_{zx}, \; p_{xy} \text{ und } p_{yx} \text{ respective } = \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$$

setzen.

Was ferner die in den Gleichungen a) vorkommenden Differentialquotienten betrifft, so sieht man leicht ein, dass sie nichts Anderes sind, als die specifischen positiven oder negativen Ausdehnungen, welche im Punkte P oder auch im ganzen unendlich kleinen Parallelipipedum in den Richtungen der Axen stattfinden, so dass wir in Uebereinstimmung mit unserer bisherigen Bezeichnungsart die Quotienten

$$\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dy}, \frac{d\zeta}{dz} \text{ respective } = \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$$

setzen können; denn es ist z. B. das partielle Differential $\frac{d\xi}{dx} \cdot dx$ diejenige Grösse, um welche sich der Punkt A weiter von der Ebene YZ entfernt hat, als der Punkt P, d. h. die totale Ausdehnung der Linie $PA = dx$, so dass deren specifische Ausdehnung

$$\lambda_x = \frac{\frac{d\xi}{dx} \cdot dx}{dx} = \frac{d\xi}{dx}$$

ist.

Was endlich die in den Gleichungen b) vorkommenden Differentialquotienten-Binome angeht, so kann man bemerken, dass das partielle Differential $\frac{d\eta}{dz} \cdot dz$ diejenige unendlich kleine Grösse ausdrückt, um welche der Punkt C sich weiter von der Ebene XZ entfernt hat, als der Punkt P, oder auch diejenige, um welche sich die ganze Kante CB' des Parallelipipedums (*Fig. 17*) weiter von der Ebene XZ entfernt hat, als die ganze Kante PA. Wird diese unendlich kleine Grösse in der Figur durch Cc repräsentirt, und der entsprechende sehr kleine Winkel CPc, um welchen die Seitenfläche APC gegen ihre anfängliche Richtung geneigt worden ist, mit φ bezeichnet, so ist also

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\frac{d\eta}{dz} \cdot dz}{dz} = \frac{Cc}{PC} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Ebenso ist

$$\frac{d\zeta}{dy} = \operatorname{tg} \psi,$$

unter ψ den sehr kleinen Winkel BPb verstanden, um welchen die Seitenfläche APB sich um PA gedreht hat. Mithin ist, wenn mit α der Winkel bezeichnet wird, in welchen der ursprünglich rechte Winkel an der Kante PA des Parallelipipedums übergegangen ist, bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi} = \operatorname{tg} (\varphi + \psi) = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Nun kann aber die Veränderung des rechten Winkels an der Kante PA des Parallelipipedums in den Winkel α auch dadurch hervorgebracht gedacht werden, dass entweder seine auf der Axe OY senkrechten Seitenflächen in der Richtung OZ, oder dass die auf der Axe OZ senkrechten Seitenflächen in der Richtung OY sich verschoben, oder dass beide Verschiebungen zugleich stattgefunden haben, wobei

es, falls es sich nur um die Formänderung des Parallelipipedums (die Widerstandsfähigkeit des ganzen Körpers) und nicht zugleich um die Aenderung seiner Lage (die Formänderung, Biegung u. s. w. des ganzen Körpers) handelt, gleichgültig ist, welche von diesen Verschiebungen vorausgesetzt wird, um den Winkel α an der Kante PA zur Folge zu haben. Bezeichnet man die specifische Grösse dieser Verschiebung mit γ_{yz}, so erkennt man leicht, dass $\operatorname{cotg}\alpha = \gamma_{yz}$, mithin auch

$$\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \gamma_{yz}$$

ist. In gleicher Weise können wir

$$\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = \gamma_{xz}; \quad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \gamma_{xy}$$

setzen, falls γ_{xz} die specifische Verschiebung der auf OX senkrechten Seitenflächen in der Richtung OZ, oder der auf OZ senkrechten Seitenflächen in der Richtung OX, und γ_{xy} die specifische Verschiebung entweder der auf OX senkrechten Seitenflächen in der Richtung OY, oder der auf OY senkrechten Seitenflächen in der Richtung OX bezeichnet.

Die constanten Coefficienten A_{yz}, A_{xz}, A_{xy} der Gleichungen b) sind hiernach nichts Anderes, als die Modul der Schubelasticität bezüglich der entsprechenden soeben bemerkten Verschiebungen; wenn wir sie deshalb noch, um diesen Umstand hervorzuheben, durch

$$G_{yz}, \quad G_{xz}, \quad G_{xy}$$

ersetzen, so können wir nun die Gleichungen a) und b) in Gemässheit der sämmtlichen zuvor bemerkten anderweitigen Bezeichnungen auch folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 3A_x \cdot \lambda_x + G_{xy} \cdot \lambda_y + G_{xz} \cdot \lambda_z \\ \sigma_y &= G_{xy} \cdot \lambda_x + 3A_y \cdot \lambda_y + G_{yz} \cdot \lambda_z \\ \sigma_z &= G_{xz} \cdot \lambda_x + G_{yz} \cdot \lambda_y + 3A_z \cdot \lambda_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad c)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= G_{yz} \cdot \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= G_{xz} \cdot \gamma_{xz} \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \cdot \gamma_{xy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d),$$

wobei ein positiver Werth von λ einer Ausdehnung, ein negativer einer Verkürzung entspricht, ein positiver Werth von σ eine solche Normalspannung bedeutet, womit, falls sie allein vorhanden wäre, eine Ausdehnung in ihrer Richtung, ein negativer Werth von σ dagegen eine solche, womit, falls sie allein vorhanden wäre, eine Verkürzung oder Compression in ihrer Richtung verbunden sein würde.

Diese Gleichungen, durch welche zunächst die im Punkte P stattfindenden drei specifischen Normalspannungen σ und drei specifischen Tangentialspannungen τ als Functionen der drei Ausdehnungen λ und drei Verschiebungen γ dargestellt werden, können auch dazu dienen, um umgekehrt die sechs Grössen λ und γ durch die sechs Grössen σ und τ auszudrücken. Wenn man also im Stande ist, die letzteren als Functionen der Coordinaten x, y, z des Punktes P und der belastenden Kräfte mit Rücksicht auf die besonderen Bedingungen, denen der Körper hinsichtlich seiner Unterstützungs- oder Befestigungsweise u. s. w. unterworfen ist, zu entwickeln, so kann man vermittelst der Gleichungen c) und d) dasselbe in Betreff der Grössen λ und γ leisten, und somit die durch die Belastung hervorgebrachten Formänderungen aller jener ursprünglich rechtwinkeligen, dem in *Fig. 17* construirten gleichen mate-

riellen Parallelipipeden bestimmen, aus welchen man sich den ganzen Körper bestehend denken kann, vorausgesetzt, dass jene Formänderungen nur in drei Ausdehnungen in den Richtungen der Kanten und in drei gegenseitigen Verschiebungen der parallelen Seitenflächen bestehen. Durch die Formänderung des Parallelipipedums (*Fig. 17*) ist aber auch die specifische Ausdehnung jeder von *P* ausgehenden materiellen geraden Linie innerhalb desselben bestimmt, und da zudem die übrigen der im Punkte *P* zusammenstossenden Parallelipipeden mit Rücksicht auf die fortbestehende Continuität des ganzen Körpers eine entsprechende Formänderung erlitten haben müssen, so sieht man wenigstens die theoretische Möglichkeit ein, ganz allgemein, sei es durch die Belastung oder durch die Dimensionen oder durch die Unterstützungsweise der Bedingung Genüge zu leisten, dass in keinem Punkte und in keiner Richtung ein gewisser dieser Richtung entsprechender Grenzwerth λ' der specifischen Ausdehnung erreicht werde. — Die Voraussetzung, dass die Formänderungen der Parallelipipeden nur in drei Ausdehnungen und in drei Verschiebungen bestehen, ist allerdings im Allgemeinen nur näherungsweise richtig; denn es könnte auch der Parallelismus der Seitenflächen und deren ebene Beschaffenheit aufgehört haben. Der Umstand jedoch, dass diese Neigung und Krümmung der Seitenflächen in den Gleichungen a) und b), die bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung erhalten worden sind, sich nicht ausgedrückt findet, lehrt, dass diese beiden Elemente der Formänderung von untergeordnetem Einflusse sind.

Die Ausführung der soeben angedeuteten Rechnung setzt vor Allem voraus, dass die Constanten *A* und *G* bekannt seien. Ihre Bestimmung kann nur durch Versuche geschehen. Was die drei Constanten *G* betrifft, so ist die Möglichkeit dieser Bestimmung aus ihrer Bedeutung ersichtlich; die drei Grössen *A* aber lassen sich als Functionen der Grössen *G* und der Modul der absoluten Elasticität E_x, E_y, E_z in den Richtungen der Elasticitätsaxen darstellen, welche durch directe Versuche bestimmbar sind. Wenn man nämlich aus den Gleichungen c) die beiden specifischen Ausdehnungen λ_y und λ_z eliminirt, so erhält man:

$$\sigma_x = \left[3A_x - \frac{G_{xy}(3A_z \cdot G_{xy} - G_{xz} \cdot G_{yz}) + G_{xz}(3A_y \cdot G_{xz} - G_{xy} \cdot G_{yz})}{9A_y \cdot A_z - G_{yz}^2}\right] \cdot \lambda_x +$$

$$+ \frac{(3A_z \cdot G_{xy} - G_{xz} \cdot G_{yz}) \cdot \sigma_y + (3A_y \cdot G_{xz} - G_{xy} \cdot G_{yz}) \cdot \sigma_z}{9A_y \cdot A_z - G_{yz}^2} \quad \ldots \text{e)},$$

und wenn man $\sigma_y = \sigma_z = 0$ voraussetzt, so ergiebt sich hieraus der Definition des Elasticitätsmodulus im §. 2 zufolge:

$$E_x = 3A_x - \frac{G_{xy}(3A_z \cdot G_{xy} - G_{xz} \cdot G_{yz}) + G_{xz}(3A_y \cdot G_{xz} - G_{xy} \cdot G_{yz})}{9A_y \cdot A_z - G_{yz}^2} \quad \ldots \text{f)}.$$

Analoge Ausdrücke würde man für die Grössen E_y und E_z finden, indem man aus den Gleichungen c) einmal λ_x und λ_z, das andere mal λ_x und λ_y eliminirte, welche Rechnung man sich übrigens der Symmetrie der Gleichungen c) wegen ersparen kann, indem man offenbar nur nöthig hat, in der Gleichung f) die Zeiger *x* und *y*, respective *x* und *z* zu vertauschen. Durch die so erhaltenen drei Relationen zwischen den neun Constanten *E*, *G*, *A* sind aber auch die drei letzteren, nämlich A_x, A_y, A_z, als Functionen der sechs ersteren bestimmt, wie es oben bemerkt wurde. Uebrigens erkennt man, dass zwischen den sechs Constanten

$$E_x, \quad E_y, \quad E_z, \quad G_{yz}, \quad G_{xz}, \quad G_{xy}$$

keine Relation übrig bleibt, dass also die drei ausgezeichneten Modul der absoluten und die drei Modul der Schubelasticität bei einem homo-

genen Körper mit drei auf einander senkrechten Elasticitätsaxen im Allgemeinen von einander unabhängig sind. — Auch sieht man jetzt ein, weshalb es bei den Gesetzen des §. 2 und bei der dadurch begründeten Definition des Elasticitätsmodulus nöthig war, die Seitenspannungen = Null vorauszusetzen; denn der Gleichung e) zufolge würde $\frac{\sigma_x}{\lambda_x}$ nicht ein constanter Werth sein, wenn σ_y und σ_z nicht = Null wären.

Wenn der homogene Körper eine ausgezeichnete Elasticitätsaxe OX hat, was dann der Fall ist, wenn die beiden andern Axen OY und OZ gleichwerthig oder gleichgültig sind, oder besser, wenn der Körper in jedem Punkte in den Richtungen aller gleichen Radien eines um die mit OX parallele Elasticitätsaxe dieses Punktes als Umdrehungsaxe construirten Umdrehungsellipsoides physikalisch gleich beschaffen ist, so lehrt die Bedeutung der Constanten in den Gleichungen a) und b), was hier nicht näher erklärt werden kann, dass

$$A_y = A_z = G_{yz}; \quad G_{xy} = G_{xz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad g)$$

ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus dem Ausdrucke f) von E_x und aus den analogen Ausdrücken von E_y und E_z, falls

$$G_{xy} = G_{xz} = G_x \text{ und } E_y = E_z = E_{yz}$$

gesetzt wird:

$$E_x = 3A_x - \frac{G_x^2}{2G_{yz}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad h)$$

$$E_{yz} = 4G_{yz} \cdot \frac{6A_x \cdot G_{yz} - G_x^2}{9A_x \cdot G_{yz} - G_x^2} \quad \ldots\ldots \quad i).$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen die Constante A_x eliminirt, so erhält man zwischen

$$E_x, \quad E_{yz}, \quad G_x, \quad G_{yz}$$

die Relation:

$$8\frac{G_{yz}}{E_{yz}} - \frac{G_x^2}{2E_x \cdot G_{yz}} = 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad k),$$

so dass also bei einem homogenen Körper mit einer ausgezeichneten Elasticitätsaxe nur drei der Constanten E und G unabhängig von einander sind.

Ist endlich der Körper isotrop, so ist

$$A_x = A_y = A_z = G_{yz} = G_{xz} = G_{xy} \quad \ldots\ldots \quad l),$$

und wenn man diese drei gleichen Constanten mit G bezeichnet, so findet man den in jeder Richtung gleichen Modulus der absoluten Elasticität

$$E = \frac{5}{2}G,$$

d. i. die oben referirte Relation 1), und man sieht, dass die Elasticitätsverhältnisse eines isotropen Körpers durch eine einzige Constante vollkommen charakterisirt sind. Die Gleichung e) erhält im vorliegenden Falle die einfache Form:

$$\sigma_x = E \cdot \lambda_x + \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad m).$$

Ihr zufolge kann die Definition des Elasticitätsmodulus eines isotropen Körpers nun dahin ergänzt werden, dass man darunter denjenigen bis zu einer

gewissen Grenze constanten Quotienten zu verstehen hat, welchen man erhält, indem man die in einer gewissen Richtung stattfindende specifische Normalspannung um den vierten Theil der Summe der specifischen Normalspannungen in zwei unter sich und zur ersten senkrechten Richtungen vermindert und die Differenz durch die specifische Ausdehnung in der ersten Richtung dividirt.

Wenn man in der Gleichung m) und den beiden entsprechenden:

$$\sigma_y = E \cdot \lambda_y + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{4}; \quad \sigma_z = E \cdot \lambda_z + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4}$$

$\sigma_y = \sigma_z = 0$ voraussetzt, so folgt:

$$\lambda_y = \lambda_z = -\frac{\lambda_x}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n),$$

d. h. wenn in einem Punkte eines isotropen Körpers in Folge der in einer beliebigen Richtung stattfindenden Normalspannung eine gewisse specifische Ausdehnung oder Verkürzung $= \lambda$ in dieser Richtung hervorgebracht wird, so hat dieselbe, ohne Hinzutreten einer andern seitlichen Normalspannung, in jeder auf der ersten senkrechten Richtung eine specifische Verkürzung respective Ausdehnung $= \frac{\lambda}{4}$ zur Folge. Wenn also z. B. ein isotroper Stab im Verhältniss $1 : 1 + \lambda$ ausgereckt wird, so verkürzen sich seine Querdimensionen im Verhältniss $1 : 1 - \frac{\lambda}{4}$; sein Volumen vergrössert sich folglich im Verhältniss $1 : (1 + \lambda)\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)^2$, oder bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung im Verhältniss $1 : 1 + \frac{\lambda}{2}$ (siehe §. 5, Anhang).

In Betreff der Relation 2) ist noch zu beweisen, dass mit Bezugnahme auf die dortigen Bezeichnungen in der That diejenigen beiden in der Ebene H liegenden Verbindungslinien AB und AC des Punktes A der materiellen Ebene F mit Punkten der Ebene F' in Folge der Verschiebung BB' der letzteren die grösste specifische Längenänderung $\lambda = \frac{\gamma}{2}$ erfahren, welche unter 45° gegen diese Ebenen oder gegen die Normale AX geneigt sind. Zu dem Ende sei zunächst AB (*Fig. 18*) eine beliebige in der Ebene H liegende Verbindungslinie und $B'B''$ die Projection von BB' auf AB'. Dann ist

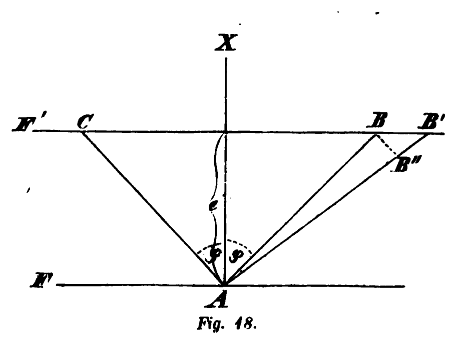


Fig. 18.

$$\lambda = \frac{B'B''}{AB},$$

oder, wenn e den Abstand der Ebenen F und F', φ den Winkel BAX bezeichnet,

$$\lambda = \frac{BB' \cdot \sin\varphi}{e \cdot \sec\varphi} = \gamma \cdot \sin\varphi \cos\varphi = \frac{\gamma}{2} \cdot \sin 2\varphi,$$

mithin am grössten und zwar $= \frac{\gamma}{2}$, falls $\varphi = 45°$ ist, wie zuvor bemerkt worden.

Obgleich es verhältnissmässig leicht sein würde, das Maass der Schubfestigkeit für die verschiedenartigsten Materialien durch directe Versuche zu bestimmen, z. B. dadurch, dass man den Druck, welcher erforderlich ist, um einen kurzen, beiderseits in feste Wände hineinreichenden Steg, wobei von einer Biegung nicht die Rede sein kann, zwischen diesen Wänden herauszuschieben, durch die Summe beider Bruchflächen dividirte, so sind doch nur sehr wenige Versuche in dieser Beziehung angestellt und bekannt gemacht worden. Diese wenigen beschränken sich auf die Schubfestigkeit einiger Hölzer in Bezug auf Abschiebung in einer mit den natürlichen Fasern parallelen Richtung; und zwar beträgt das Maass derselben nach BARLOW für Tannenholz $41^k,4$, nach MINARD und DESORMES für das Holz der Zitterpappel 57^k pro 1 Quadratcentimeter.

1833. NAVIER *Rés. des leç. etc. sur l'applic. de la méc. etc.* I. — Deutsch von WESTPHAL. p. 13*.
1854. WIEBE Einfache Maschinentheile. I. p. 95*.

Allgemeine Theorie der elastischen Körper:
NAVIER *Mém. de l'Ac. d. sc. à Par.* Bd. VII.
POISSON desgl. Bd. VIII.
CAUCHY *Exercices.*
1831. LAMÉ et CLAPEYRON *Crelle J.* Bd. VII. p. 145*.
1854. DIENGER Grun. Archiv. Thl. 23. p. 293*.

V. Zusammengesetzte rückwirkende Elasticität und Festigkeit.

§. 18. Tragfähigkeit einer verticalen Stütze, die unten befestigt, oben frei ist.

Ein prismatischer Stab sei an einem Ende eingeklemmt und am andern durch eine seiner Länge nach wirkende Kraft gedrückt, z. B. vertical stehend von oben mit einem Gewichte P belastet. Wenn man annimmt, dass das untere Stabende vollkommen unverrückbar befestigt ist, dass die Richtungslinie des Drucks P genau in die Axe des Stabes fällt, und dass das Material desselben vollkommen homogen ist, so würde kein Grund gedacht werden können, weshalb der Stab in irgend einem Sinne eine Biegung erfahren sollte; wenn dieses aber nicht der Fall ist, so darf man annehmen, dass in allen Punkten desselben Querschnitts, oder auch, falls wie hier immer von dem eigenen Gewicht des Stabes abstrahirt wird, dass in allen Punkten aller Querschnitte dieselbe specifische rückwirkende Spannung in der Richtung der Längenfasern hervorgerufen wird, so dass die mit Sicherheit zulässige Grösse der Belastung $P = k \cdot q$ ist, unter q den Inhalt des Querschnitts, und unter k einen Erfahrungscoefficienten verstanden, dessen ungefährer Werth im §. 6 für einige Materialien angegeben worden ist.

Nun finden sich aber die obigen Voraussetzungen der unwandelbaren Befestigung des Stabes, des genauen Zusammenfallens seiner Axe mit der Richtungslinie des Drucks P und der Gleichförmigkeit des Materials in Wirklichkeit niemals in aller Strenge erfüllt, und dieses ist der Grund, weshalb ein stabförmiger Körper bei der Einwirkung einer seiner Längenrichtung nach drückenden Kraft sein offenbar labiles Gleichgewicht im ungebogenen Zustande nicht beibehält, sondern der Biegung und dem Zerknicktwerden in Folge dieser Biegung unter-

worfen ist, sobald das Verhältniss der Länge (Höhe) zur Dicke eine gewisse Grösse überschreitet. Bei derjenigen Aeusserungsweise der Elasticität eines Stabes, bei welcher sie als Widerstand gegen eine solche Biegung auftritt, nennen wir dieselbe insbesondere zusammengesetzte rückwirkende Elasticität, während in Uebereinstimmung damit der Widerstand gegen die Zerknickung, nach vorhergegangener Biegung, zusammengesetzte rückwirkende Festigkeit genannt werden soll. Diese beiden Widerstände können nämlich respective als aus einfacher rückwirkender und relativer Elasticität, einfacher rückwirkender und relativer Festigkeit zusammengesetzt betrachtet werden.

Während von den der Theorie der relativen Elasticität im §. 7 zum Grunde gelegten fünf Voraussetzungen die beiden ersten hier von selbst fortfallen, indem die Kraft *P* mit der Axe des Stabes vor seiner Biegung zusammenfallen soll, und also von einer Kraftebene im dortigen Sinne hier nicht die Rede sein kann, behalten wir dagegen die beiden Voraussetzungen bei: 1) dass der geometrische Ort der ursprünglich in einem Querschnitt befindlich gewesenen materiellen Punkte beständig ein Querschnitt, d. h. eine zur elastischen Linie des gebogenen Stabes senkrechte Ebene bleibt, wobei unter der elastischen Linie hier wie früher der geometrische Ort der ursprünglich in der geraden Axe befindlich gewesenen materiellen Punkte verstanden wird; 2) dass die Biegung sehr gering ist. Die letztere Voraussetzung schliesst hier zugleich die fünfte des §. 7 als Folgerung ein.

Für jeden homogenen prismatischen Stab giebt es eine gewisse durch die Axe gelegte Ebene, nämlich den geometrischen Ort derjenigen Schwerpunktshauptaxen der Querschnitte, in Bezug auf welche deren Trägheitsmomente am grössten sind (§. 16), in welcher der Stab am leichtesten gebogen werden kann, falls nicht etwa jede solche Ebene in dieser Beziehung gleichgültig ist; und da hier die in die Axe fallende Kraft *P* kein Bestreben hat, die Biegung in einer bestimmten von jener vielleicht abweichenden Richtung hervorzurufen, so muss man annehmen, dass dieselbe in dieser Ebene der leichtesten Biegung, welche wir daher schlechtweg die Biegungsebene nennen werden, wirklich erfolgen, oder dass die elastische Linie eine in dieser Ebene liegende Curve sein werde, ohne dass es zur Rechtfertigung dieser Annahme erforderlich wäre, eine gewisse Beschaffenheit der Querschnittsform vorauszusetzen. Uebrigens sind die aus den gemachten Voraussetzungen zu ziehenden nächsten Folgerungen hier offenbar dieselben wie im §. 7; d. h. wir dürfen auch hier schliessen, dass die specifische Spannung der Längenfasern in allen Punkten einer auf der Biegungsebene senkrechten geraden Linie gleich ist, während wir ausserdem wie dort annehmen dürfen, dass die materiellen Punkte der elastischen Linie beständig die geometrischen Schwerpunkte der auf derselben senkrechten Querschnitte des Stabes bleiben.

Die in irgend einem Punkte irgend eines Querschnitts im Gleichgewichtszustande des gebogenen Stabes hervorgerufene Spannung ist durch die Bedingung bestimmt, dass das in dem gedachten beliebigen Querschnitt abgeschnittene Stück des Stabes bei unveränderter Form als festes und freies System im Gleichgewicht bleiben muss, falls die in den Elementen des Querschnitts wirksam gewesenen

Spannungen in denselben Elementen der Endfläche des abgeschnittenen Körpers als äussere Kräfte angebracht werden. Diese Spannungen können theils auf dem Querschnitt senkrechte Normalspannungen, theils in denselben fallende Tangentialspannungen sein. Die ersteren denke man zu einer im Schwerpunkt C des Querschnitts angreifenden Resultante $= \int \sigma \cdot dq$ und zu einem resultirenden Spannungspaar zusammengesetzt, welches wiederum in zwei Seitenpaare zerlegt werden kann, so dass die Ebene des einen mit dem Momente $= \int \sigma \cdot dq \cdot \eta$ in die Biegungsebene fällt, die Ebene des andern mit dem Momente $= \int \sigma \cdot dq \cdot \xi$ darauf senkrecht ist, wobei σ die positive oder negative (absolute oder rückwirkende) specifische Normalspannung in einem Punkte bedeutet, dessen positiver oder negativer (nach der convexen oder concaven Seite des gebogenen Stabes hin gelegener) Abstand von der auf der Biegungsebene senkrechten geraden Linie $CN = \eta$, und dessen positiver oder negativer Abstand von der Biegungsebene selbst $= \xi$ ist. Andererseits denke man die in dem oberen Endpunkt der elastischen Linie angreifende Kraft P durch eine im Punkte C angreifende gleiche und gleich gerichtete Kraft P und durch ein in der Biegungsebene liegendes Paar vom Momente M ersetzt, die Kraft P alsdann in eine auf dem Querschnitt senkrechte und in eine darin fallende Componente zerlegt. Wegen der Geringfügigkeit der Biegung darf die erstere Componente $= P$ selbst, die letztere $= 0$ gesetzt und damit auch zugleich die mit dieser letzteren Componente im Gleichgewicht befindliche Tangentialspannung des Querschnitts vernachlässigt werden. Unter P und M absolute Werthe verstanden, reduciren sich sonach die Gleichgewichtsbedingungen auf die folgenden:

$$\int \sigma \cdot dq = -P; \quad \int \sigma \cdot dq \cdot \eta = M; \quad \int \sigma \cdot dq \cdot \xi = 0.$$

Aus denselben ergeben sich durch eine ganz gleiche Betrachtung wie in §. 7, falls ρ den Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte C, I das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Axe CN, E den Elasticitätsmodulus des Stabes in der Richtung der Längenfasern bedeutet, die beiden Gleichungen:

$$\frac{EI}{\rho} = M \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

$$\sigma = \frac{M \cdot \eta}{I} - \frac{P}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2),$$

indem die dritte der obigen Gleichgewichtsbedingungen mit Rücksicht auf die in der Gleichung $\int \xi \eta \cdot dq = 0$ ausgedrückte charakteristische Eigenschaft der Hauptaxen durch die Bedingungen der Aufgabe sich von selbst erfüllt findet. Die Gleichung 1) bestimmt die Gestalt der elastischen Linie. Aus der Gleichung 2) ergiebt sich zunächst, dass die neutrale Axe, nämlich diejenige auf der Biegungsebene senkrechte gerade Linie, in deren sämmtlichen Punkten $\sigma = 0$ ist, in dem mit der Lage des Querschnitts veränderlichen Abstande $= \frac{P}{q} \cdot \frac{I}{M}$ von der geraden Linie CN nach der convexen Seite des gebogenen Stabes hin liegt,

und in der Ebene dieses Querschnitts selbst ausserhalb des Körpers liegen kann.

Die Spannung σ ist der Gleichung 2) zufolge, absolut genommen, um so grösser, je grösser M und je grösser der Absolutwerth von η ist. Der **Bruchquerschnitt** des Stabes ist folglich derjenige, in Bezug auf dessen zur Biegungsebene senkrechte Gerade CN, welche wir hier, da sie den Namen „neutrale Axe“ nicht verdient, zum Unterschiede die **Biegungsaxe** nennen wollen, das Moment M von P am grössten ist, im vorliegenden Falle also offenbar der unterste Querschnitt, für welchen man, wenn f die Entfernung des oberen Endpunktes der elastischen Linie von der ursprünglich geraden Axe des Stabes bedeutet, $M = P \cdot f$ hat. Der **gefährliche Punkt** ferner, dessen Spannung, je nachdem sie positiv oder negativ ist, absolut genommen $= k'$ oder k'' gesetzt werden muss, ist entweder der in dem grössten Abstande $\eta = e'$ nach der convexen, oder der in dem grössten Abstande $-\eta = e''$ nach der concaven Seite zu, von der Biegungsaxe aus gerechnet, befindliche Punkt des Bruchquerschnitts, so dass die höchstens zulässige Belastung P des Stabes mit Rücksicht auf 2) aus einer der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} k' &= \left(\frac{e'}{I} \cdot f - \frac{1}{q}\right) \cdot P \\ k'' &= \left(\frac{e''}{I} \cdot f + \frac{1}{q}\right) \cdot P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

berechnet werden müsste, und zwar natürlich aus derjenigen, welcher der kleinere Werth von P entspricht. Wenn, wie es gewöhnlich zu geschehen pflegt, $k' = k'' =$ einem mittleren Werthe k gesetzt wird, und wenn zudem e'' nicht kleiner als e' ist, so können die beiden Gleichungen 3) immer durch die einzige

$$k = \left(\frac{e''}{I} \cdot f + \frac{1}{q}\right) \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

ersetzt werden; der gefährliche Punkt ist dann immer der äusserste Punkt des Bruchquerschnitts an der concaven Seite.

Der Gleichung 1) zufolge entspricht einem gewissen Werth von ρ und einer gewissen Grösse des als Factor in M steckenden horizontal gemessenen Abstandes des oberen Endpunktes der elastischen Linie von dem beliebigen Punkte C derselben, also überhaupt einer gewissen Biegung des Stabes ein um so kleinerer Werth der zu ihrer Erhaltung erforderlichen Kraft P, je kleiner I ist; und ebenso entspricht auch den Gleichungen 3) und 4) eine um so geringere zulässige Belastung P, je kleiner I ist. Dadurch ist es gerechtfertigt, I dem kleinsten Trägheitsmomente des Querschnitts in Bezug auf irgend eine durch seinen Schwerpunkt in seiner Ebene gezogene Axe gleich zu setzen, d. h. als die Biegungsebene den geometrischen Ort derjenigen Schwerpunkts-Hauptaxen der Querschnitte des Stabes anzunehmen, in Bezug auf welche ihre Trägheitsmomente am grössten sind.

Um aber nun aus der Gleichung 3) oder 4) die mit Sicherheit zulässige Belastung P zu finden, müsste zunächst eine Relation zwischen P und f ermittelt

werden, um f durch P und die bekannten Grössen auszudrücken. Allein die hierauf gerichtete Untersuchung führt zu dem bemerkenswerthen Ergebniss, dass P und f nur insofern abhängig von einander sind, als zwar P nothwendig eine gewisse Grösse haben muss, um irgend eine noch so geringe Biegung des Stabes überhaupt möglich zu machen, dass aber, wenn P diesen Grenzwerth erreicht und der Stab sich biegt, P und f gänzlich unabhängig von einander sind, woraus man schliessen muss, dass das Gleichgewicht des auf solche Weise gebogenen Stabes stets indifferent ist. Das heisst: wenn eine gewisse Belastung P im Stande ist, den Stab bei irgend einer Ausbiegung f des oberen Endes im Gleichgewicht zu erhalten, so vermag dieselbe Belastung ihn auch bei jeder andern Grösse von f in der gebogenen Form zu erhalten, so dass, wenn erst einmal die geringste Biegung eingetreten, es ebenso möglich ist, dass dieselbe unverändert bleibt, als dass sie sich bis zum Bruch vergrössert, dass aber der letztere nicht blos möglich, sondern unvermeidlich ist, wenn die Belastung des bereits gebogenen, im Gleichgewicht befindlichen Stabes um ein Geringes vergrössert wird. Dieses merkwürdige Resultat der Analyse ist die nothwendige Folge der derselben zu Grunde liegenden Annahme, dass die Kraft P genau in dem Schwerpunkte des obersten Querschnitts des Stabes angreift, und wenn es mit der Erfahrung nicht ganz stimmt, so rührt dies vorzugsweise daher, dass in Wirklichkeit jene Annahme sich nicht genau erfüllt findet. Der angeführte besondere Umstand macht die Lösung der Hauptaufgabe dieses Kapitels, nämlich die Bestimmung der erforderlichen Dimensionen oder der zulässigen Belastung eines Körpers in Gemässheit der Bedingung, dass in keinem Punkte und in keiner Richtung eine entsprechende bestimmte positive oder negative specifische Ausdehnung (oder Spannung bei fehlender Seitenspannung) überschritten werden darf, im vorliegenden Falle unmöglich. Man muss sich vielmehr damit begnügen, den Bruch in Folge der Biegung, die Zerknickung, unmöglich zu machen, was dem Obigen zufolge nur dann der Fall ist, wenn man die Dimensionen des Stabes oder seine Belastung so bestimmt, dass selbst die geringste Grösse der mit dem geringsten Widerstand verbundenen und deshalb wahrscheinlichsten Biegungsweise unmöglich ist. So findet man, dass

$$P < \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

sein muss, unter l die Länge des Stabes (die Höhe der Stütze oder Säule) verstanden. Die Tragfähigkeit der prismatischen Säule ist also, abgesehen von der möglichen Zerquetschung bei geringerer Länge, dem Quadrat der letzteren umgekehrt proportional.

Weil, wenn die Belastung die durch die Formel 5) bestimmte Grenze erreicht, nicht etwa blos die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze, sondern mit derselben Wahrscheinlichkeit auch der sofortige Bruch zu gewärtigen ist, so darf man von jenem Grenzwerth für Schmiedeeisen und Gusseisen, überhaupt für Metalle, nur etwa $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{5}$, für Hölzer $\frac{1}{10}$ als auf die Dauer zulässig in Rechnung stellen.

Um die Gleichung der elastischen Linie AB (*Fig. 19*) und dadurch, wenn möglich, die im Gleichgewichtszustande dem Verticaldruck P entsprechende Ausbiegung $BD = f$ des oberen Endpunktes aus der Verticalen AX zu finden, seien x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes C der Curve AB, bezogen auf die rechtwinkeligen Axen AX und AY. Die Momentengleichung in Bezug auf die durch den Punkt C gehende Biegungsaxe ist nach 1):

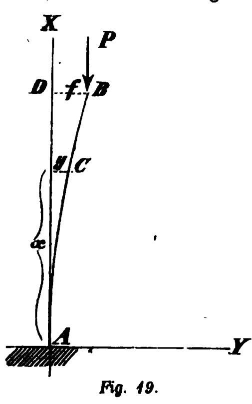


Fig. 19.

$$\frac{EI}{\rho} = P \cdot (f - y)$$

oder, wenn mit Rücksicht auf die als sehr gering angenommene Biegung

$$\frac{1}{\rho} = + \frac{d^2 y}{dx^2}$$

gesetzt wird (siehe §. 8), wobei das Zeichen + voraussetzt, dass der positive Theil der Axe der y sich, wie in der Figur angenommen ist, nach derselben Richtung erstreckt, nach welcher die Curve ihre hohle Seite kehrt,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EI} \cdot (f - y) \quad \dots\dots\dots \quad a).$$

Um letztere Gleichung auf die einfachste Form zu bringen, werde

$$f - y = - z$$

gesetzt; dann ist $d^2 y = d^2 z$, also:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{P}{EI} \cdot z,$$

mithin bekanntlich:

$$z = A \cdot \sin\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + B \cdot \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

unter A und B Constante verstanden, welche den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe gemäss bestimmt werden müssen. Wenn nämlich die positive Grösse $\frac{P}{EI}$ mit a^2 bezeichnet und die zu integrirende Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = - a^2 \cdot z$$

auf beiden Seiten mit $2\,dz$ multiplicirt wird, so entsteht:

$$d\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] = - a^2 \cdot d(z^2)$$

also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = - a^2 z^2 + C$$

unter C eine Constante verstanden, oder:

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{C - a^2 z^2}},$$

woraus durch eine zweite Integration

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{C - a^2 z^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{a \cdot dz}{\sqrt{C}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a z}{\sqrt{C}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \text{ arc. sin } \left(\frac{a z}{\sqrt{C}}\right) + C^1$$

erhalten wird. Hieraus kann leicht auch z explicite durch x ausgedrückt werden, indem aus der Gleichung

$$a\,(x - C^1) = \text{arc. sin } \left(\frac{a z}{\sqrt{C}}\right)$$

$$z = \frac{\sqrt{C}}{a} \cdot \sin\,(ax - a\,C^1)$$

$$= \frac{\sqrt{C}}{a} \cdot [\sin\,(ax) \cdot \cos\,(a\,C^1) - \cos\,(ax) \cdot \sin\,(a\,C^1)]$$

folgt, oder, wenn die constanten Grössen

$$\frac{\sqrt{C}}{a} \cdot \cos\,(a\,C^1) = A; \quad - \frac{\sqrt{C}}{a} \cdot \sin\,(a\,C^1) = B$$

gesetzt werden,

$$z = A \cdot \sin\,(ax) + B \cdot \cos\,(ax)$$

$$= A \cdot \sin\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + B \cdot \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right).$$

Diese Gleichung geht, wenn man für z seinen Werth $y - f$ wieder einsetzt, über in:

$$y = f + A \cdot \sin\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + B \cdot \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \quad \ldots \quad \text{b)}.$$

Dies ist die verlangte Gleichung der elastischen Linie, aber noch mit den drei Unbekannten f, A, B behaftet. Um letztere zu bestimmen, können nur die folgenden drei Paare nach der Voraussetzung und nach der Natur der Sache zusammengehöriger Werthe:

$$x = 0, \; y = 0; \quad x = 0, \; \frac{dy}{dx} = 0; \quad x = l, \; y = f$$

benutzt werden. Setzt man zuerst in der Gleichung b): $x = 0$, $y = 0$, so folgt: $B = -f$. Nimmt man dann von derselben die Ableitung nach x und setzt darin $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt: $A = 0$. Die Gleichung b) geht also, wenn für A und B die gefundenen Werthe gesetzt werden, über in:

$$y = f \cdot \left[1 - \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI}}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{c)}.$$

Setzt man hierin, um schliesslich f zu bestimmen, $x = l$, $y = f$, so folgt:

$$0 = -f \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right);$$

also, da nach der Voraussetzung f eine endliche Grösse ist,

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{d)},$$

welcher Gleichung, während f gänzlich unbestimmt bleibt, die Elasticität, die Dimensionen und die Belastung des Stabes genügen müssen, wenn irgend eine endliche Ausbiegung f, die wir vorausgesetzt haben, im Gleichgewichtszustande überhaupt möglich sein soll.

Nun wird aber der Gleichung d) genügt, wenn

$$l\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots$$

oder wenn

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{e)}$$

$$P = \frac{9\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{f)}$$

$$P = \frac{25\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{g)}$$

u. s. w., also bei demselben Stab durch verschiedene Werthe von P, welche, wie die Quadrate der ungeraden Zahlen, fortschreiten. Diese verschiedenen Werthe von P entsprechen den verschiedenen Arten der Biegung, die der Stab erleiden kann, deren Zahl theoretisch unbegrenzt ist. Für die drei ersten Werthe von P z. B. sind sie durch *Fig. 20* dargestellt. Im zweiten Fall nämlich, welcher der Gleichung f) entspricht, ergiebt sich aus c):

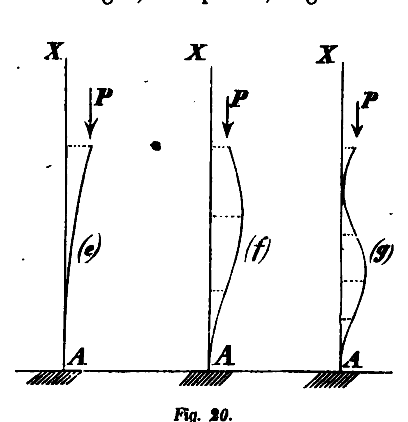


Fig. 20.

$$\text{für } x = \frac{1}{3}l, \quad y = f \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = f$$

$$\text{für } x = \frac{2}{3}l, \quad y = f \cdot (1 - \cos\pi) = 2f$$

Im dritten Falle g) liefert dieselbe Gleichung c):

$$\text{für } x = \frac{1}{5}l, \quad y = f \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = f$$

$$x = \frac{2}{5}l, \quad y = f \cdot (1 - \cos\pi) = 2f$$

$$x = \frac{3}{5}l, \quad y = f \cdot \left(1 - \cos\frac{3\pi}{2}\right) = f$$

$$x = \frac{4}{5}l, \quad y = f \cdot (1 - \cos 2\pi) = 0.$$

Die erste Art der Biegung ist die einfachste und diejenige, welche am leichtesten eintritt, weil die dazu erforderliche Grösse von P am kleinsten ist. Sie ist deshalb bei Beurtheilung der Tragfähigkeit des Stabes massgebend, d. h. es muss in Ueberein-

stimmung mit der zu rechtfertigenden Formel 5) die Belastung jedenfalls so klein sein, dass auch diese einfachste und am leichtesten mögliche Biegung unmöglich ist. Bei einer stetigen Vergrösserung des Drucks ist es nicht wohl denkbar, dass eine andere als diese eintreten sollte, wohingegen bei einem Stosse allerdings auch eine der mehrfachen Biegungen eintreten kann, vorausgesetzt, dass das Material nicht eher zerquetscht, als ihr Eintreten ermöglicht wird.

Die Werthe von E für die gewöhnlichsten Bau- und Maschinenmaterialien findet man in §. 2, die Ausdrücke der Function I für die gebräuchlichsten Querschnittsformen im §. 7 angegeben.

§. 19. Verschiedene Arten der Wirkungsweise einer Stütze. Versuche.

Analog den vier einfachen Hauptarten der Unterstützungs- und Belastungsweise eines auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Balkens, welche in den §. 8, §. 10, §. 13 und §. 14 abgehandelt worden sind, können deren auch in Bezug auf die zusammengesetzte rückwirkende Festigkeit ebenso viele unterschieden werden. Dem Falle (§. 8), dass ein Balken mit einem Ende eingeklemmt und am anderen belastet ist, entspricht hier derjenige, welcher im vorigen Paragraphen betrachtet wurde.

1. Dem zweiten Falle (§. 10), dass nämlich ein Balken mit beiden Enden auf Stützen liegt, entspricht hier die Voraussetzung, dass der Stab mit beiden Enden gegen feste Hindernisse gestützt ist, so dass er sich bei der Biegung um die Endpunkte seiner Axe drehen kann, während die Richtungslinie des Drucks P stets mit der Verbindungslinie dieser Endpunkte zusammenfällt (*Fig. 21*). Diese Voraussetzung findet sich z. B. näherungsweise bei allen beiderseits um Zapfen drehbaren Lenkerstangen erfüllt, durch welche bei einer Maschine die Verwandlung einer hin- und hergehenden Bewegung in eine stetig rotirende, oder umgekehrt, vermittelt wird. Damit ein solcher Stab durch den Druck P nicht zerknickt werden kann, muss

$$P < \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \text{. . . . . 1)}$$

sein.

2. Dem dritten Falle bei der relativen Festigkeit (§. 13), dass ein Balken an einem Ende eingeklemmt ist, mit dem andern auf einer Stütze liegt, entspricht hier derjenige, dass ein Stab einerseits befestigt oder überhaupt so gestützt ist, dass die unabhängig von ihm im Raume fixirt gedachte gerade Axe, die er vor seiner Biegung hatte, immer Tangente an die elastische Linie bleiben muss, während das andere Ende drehbar und so gestützt ist, dass der entsprechende Endpunkt der elastischen Linie jene Axe oder Tangente nicht verlassen kann (*Fig. 23*). In diesem Falle befindet sich z. B. die Kolbenstange einer Dampfmaschine, wenn ihr aus dem Cylinder hervorragendes Ende mit einer in einer Führung hin- und hergehenden Traverse drehbar verbunden ist. Ein solcher Stab wird nicht zerknickt, wenn

$$P < 2\pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2} \quad \text{. . . . . 2)}$$

ist.

3. Endlich entspricht dem vierten Fall bei der relativen Festigkeit (§. 14) hier derjenige, dass eine Stütze beiderseits befestigt oder auf sonstige Weise an der Drehung um die Endpunkte der Axe verhindert ist (*Fig.* 22). Die Kolbenstange würde sich z. B. in diesem Falle befinden, wenn sie mit der Traverse fest verbunden wäre; aber auch jede Säule oder Stütze, deren flach abgeschnittene Enden die Drehung verhindern, gehört hierher. Der Theorie zufolge kann in diesem Falle der Bruch durch Biegung nicht eintreten, wenn

$$P < 4\pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

ist.

Die Tragfähigkeiten in den erwähnten vier Fällen verhalten sich also $= 1 : 4 : 8 : 16$, während sie sich in den entsprechenden bei einem auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Balken $= 1 : 4 : \frac{16}{3} : 8$ verhalten, falls dabei in den drei letzteren die Belastung in der Mitte des Balkens angreift, oder $= 1 : 4 : 4 : 6$, falls die Belastung gleichmässig über der ganzen Länge des Balkens vertheilt ist.

Wenn die nach der Formel 5) des vorigen oder nach den Formeln 1) bis 3) des gegenwärtigen Paragraphen berechneten Gewichte zuweilen nicht unbeträchtlich von denjenigen abweichen, durch welche Stäbe den Versuchen zufolge wirklich zerknickt werden, so darf man sich nicht darüber verwundern. Denn die durch die Theorie gefundenen Belastungen sind die unteren Grenzwerthe, bei denen die Biegung und das Zerknicktwerden infolge derselben blos möglich wird, aber nur dann wirklich eintritt, wenn anderweitige Umstände mitwirken, welche die Biegung einleiten. Diese zufälligen Umstände, als z. B. der nicht genau centrale Druck, die unvollkommene Gleichförmigkeit des Materials u. s. w., welche einerseits den Voraussetzungen der Theorie widersprechen, andererseits aber für deren Berechtigung, indem ohne sie eine Biegung überhaupt nicht eintreten würde, doch wesentlich nöthig sind, sind natürlich in jedem besonderen Falle von verschieden grossem Einflusse. Es ist möglich, dass die Belastung den theoretischen Grenzwerth beträchtlich überschritten hat, bevor die zufälligen Umstände die Biegung vermitteln; es ist andererseits möglich, dass bei einer zu grossen Excentricität des Drucks der Bruch bei einer viel geringeren Grösse desselben erfolgt. Auch lehren die Versuche, dass die Biegung nicht immer genau in einer solchen Richtung stattfindet, dass die Function I ein Minimum ist, dass vielmehr meistentheils, wenn nicht etwa eine Dimension des Querschnitts beträchtlich kleiner ist als die andere, durch einen Fehler in der Gleichartigkeit des Materials und durch die besonderen Umstände hinsichtlich der Befestigungs- oder Unterstützungsweise der Enden des Stabes die Richtung der Biegung bestimmt wird. Endlich ist das der Theorie zufolge indifferente Gleichgewicht des gebogenen Stabes wesentlich an die Bedingung geknüpft, dass der Druck auch bei fortschreitender Biegung stets genau in dem Endpunkte der elastischen Linie angreift, wovon man nur dann überzeugt sein könnte, wenn der Stab in Spitzen oder wenigstens in Schneiden ausliefe, die auf der Biegungsebene senkrecht sind. Ist aber z. B. das belastete Ende einer unten befestigten

oder eben abgeschnittenen Stütze abgerundet, so rückt der Berührungspunkt einer darauf ruhenden Last um so mehr aus der elastischen Linie heraus nach der convexen Seite hin, je mehr die Biegung zunimmt; ihr Moment in Bezug auf die Biegungsaxe eines Querschnitts wird also in geringerem Maasse grösser, als die Biegung und folglich das Spannungsmoment jenes Querschnitts, woraus folgt, dass das Gleichgewicht des gebogenen Stabes in der That stabil ist. — Diese verschiedenen Umstände zusammengenommen sind von solcher Art, dass dadurch nicht nur die constanten Coefficienten der theoretischen Formeln, sondern auch die darin liegenden Gesetze selbst, nach welchen die Tragfähigkeiten der Stützen von ihren Dimensionen abhängen, modificirt werden, und es ist deshalb hier mehr als bei der relativen Festigkeit nöthig, jene Formeln durch die Ergebnisse der Versuche zu corrigiren.

Die Formeln 1) und 3) können unmittelbar aus der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie abgeleitet werden. Sind nämlich 1. beide Endpunkte A und B der elastischen Linie (*Fig.* 21) nur der Bedingung unterworfen, dass sie in der Verticalen AB bleiben müssen, während ihre Tangenten in A und B beliebige sehr kleine Winkel mit AB bilden können, so sind zwar offenbar, vom rein theoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet, auch wieder unendlich viele Biegungsarten möglich, indem der Stab sich in beliebig viele gleiche Theile abtheilen kann, welche sich abwechselungsweise nach entgegengesetzten Seiten der Geraden AB ausbiegen. Setzen wir jedoch von vornherein die einfachste, die geringste Kraft erfordernde und deshalb allein in Betracht kommende Biegungsweise voraus, bei welcher die elastische Linie nur einen einzigen Bogen bildet, der, weil das untere Widerlager durch eine dem Drucke P gleiche und entgegengesetzte Kraft ersetzt werden kann, offenbar in Bezug auf die durch die Mitte C gehende Horizontale CD symmetrisch ist, so befindet sich jede Hälfte des Stabes in demselben Falle, als ob sie mit dem einen Ende C vertical eingeklemmt wäre, während das andere beliebig ausweichen kann. Man braucht also, um den Grenzwerth von P zu finden, in der Formel 5) des vorigen Paragraphen nur l mit $\frac{l}{2}$ zu vertauschen; so entsteht die Formel 1).

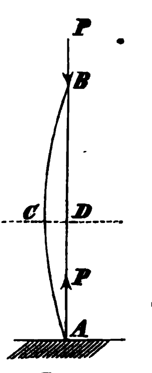


Fig. 21.

2. Ist die elastische Linie der Bedingung unterworfen, dass sie von der Verticalen AB in ihren Endpunkten A und B (*Fig.* 22) stets berührt werden muss, so hat sie, wenn man die in der Figur angedeutete einfachste Biegungsweise voraussetzt, offenbar dieselbe Gestalt wie die unteren $^4/_5$ der elastischen Linie in dem durch *Fig.* 20 g) im vorigen Paragraphen dargestellten Falle, und es lässt sich deshalb der vorliegende Fall auf jenen dadurch zurückführen, dass man den Stab um $^1/_4$ seiner Länge verlängert und dann das obere freie Ende mit dem Gewicht P beschwert denkt. Man erhält folglich den Grenzwerth von P, wenn man in dem Ausdrucke g) des vorigen Paragraphen $\frac{5}{4}l$ an die Stelle von l setzt. Das liefert:

$$P < \frac{25\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{\frac{25}{16}l^2} \text{ oder } < 4\pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2}.$$

Fig. 22.

3. Der noch übrige Fall endlich, in welchem die elastische Linie von der Verticalen AB in ihrem einen Endpunkte A berührt, im andern B geschnitten wird (*Fig.* 23), erfordert eine besondere Betrachtung. Wenn man nämlich die einfachste hier denkbare Biegungsweise, welche durch *Fig.* 23 dargestellt ist, voraussetzt, so ist klar, dass man eine unmögliche Gleichung bekommen würde, wenn man das Spannungsmoment $\frac{EI}{\rho} = EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ irgend eines Querschnitts einfach dem Moment von P in Bezug auf die Biegungsaxe dieses Querschnitts gleich setzte. Denn es muss die elastische Linie nothwendig in einem gewissen Punkte C, der ausserhalb der Verticalen AX liegt, einen Inflexionspunkt haben, und das auf ihn bezogene Moment von P müsste $=$ Null sein, was nicht möglich ist. Man muss daraus schliessen, dass die nothwendig vorhandene verticale Führung des Punktes B der elastischen Linie auf denselben einen Horizontaldruck p von solcher Grösse ausübt, dass die auf den Inflexionspunkt bezogenen entgegengesetzten Momente von P und p absolut gleich sind. Die Momentengleichung ist dann bei der aus der Figur ersichtlichen Annahme der Coordinatenaxen:

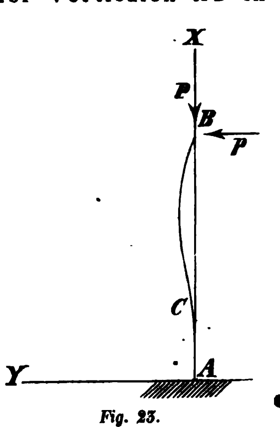


Fig. 23.

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + p(l-x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{a).}$$

Wenn man hieraus durch zweimalige Integration die Gleichung der elastischen Linie in endlicher Form erhalten, und darin zugleich p durch P und die Dimensionen des Stabes ausdrücken könnte, so würde man auch die nothwendig vorhandenen beiden relativen Maxima M' und M'' des absoluten Werths der rechten Seite der Gleichung a), d. h. das grösste Spannungsmoment sowohl von allen Querschnitten der Strecke AC, als von allen Querschnitten des entgegengesetzt gebogenen Theils CB, somit die durch die Biegung allein hervorgerufenen absoluten respective rückwirkenden specifischen Spannungen $\left(\frac{M' \cdot e'}{I}; \frac{M' \cdot e''}{I}; \frac{M'' \cdot e'}{I}; \frac{M'' \cdot e''}{I}\right)$ in den vier relativ gefährlichen, nämlich den von den Biegungsaxen der beiden relativen Bruchquerschnitte am weitesten entfernten Punkten derselben finden können. Indem man alsdann die letzteren, vermindert oder vermehrt um die von der Biegung unabhängige überall gleiche rückwirkende specifische Spannung $\frac{P}{q}$, der grössten zulässigen, absoluten oder rückwirkenden specifischen Spannung k' oder k'' gleich setzte, würde man vier Bedingungsgleichungen:

$$k' = \frac{M'e'}{I} - \frac{P}{q}; \quad k'' = \frac{M'e''}{I} + \frac{P}{q}$$

$$k' = \frac{M''e'}{I} - \frac{P}{q}; \quad k'' = \frac{M''e''}{I} + \frac{P}{q}$$

erhalten, in deren beiden zu unterst stehenden die Abstände e' und e'' (der äussersten Punkte an der convexen, respective concaven Seite) wegen der entgegengesetzten Biegung dieselben Werthe haben, wie die Abstände e'' und e' der beiden zu oberst stehenden Gleichungen. Aus der ungünstigsten von diesen vier Gleichungen müsste die höchstens zulässige Belastung P, oder die höchstens zulässige Länge l des Stabes,

oder die mindestens erforderliche unbestimmt gelassene Dimension des Querschnitts berechnet werden. — Es wird sich aber zeigen, dass diese strenge Lösung des Problems hier ebenso wenig möglich ist, wie im vorigen Paragraphen, obgleich zur Bestimmung der Unbekannten p und beider durch die zweimalige Integration eingeführter Constanten drei Paare zusammengehöriger Werthe:

$$x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0; \quad x = 0,\ y = 0; \quad x = l,\ y = 0$$

durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben sind.

Um das allgemeine Integral der Gleichung a) zu erhalten, setze man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y + \frac{p}{EI}(l - x) = z,$$

so folgt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{P}{EI} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} z,$$

also

$$z = A \cdot \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + B \cdot \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

unter A und B Constante verstanden (siehe §. 18). Setzt man nun wieder für z seinen obigen Werth, so erhält man:

$$\frac{P}{EI} \cdot y = -A \cdot \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - B \cdot \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + \frac{p}{EI}(l - x) \quad . \ . \ \text{b)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man $x = 0$, $y = 0$ setzt,

$$0 = -B + \frac{p}{EI} \cdot l \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{c)},$$

wenn man ferner $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt,

$$0 = -A \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} - \frac{p}{EI} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{d)},$$

wenn man endlich $x = l$, $y = 0$ setzt,

$$0 = -A \cdot \sin\left(l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - B \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \quad . \ . \ . \ . \ \text{e)}.$$

Aus c) und d) folgt:

$$-\frac{B}{A} = l\sqrt{\frac{P}{EI}},$$

aus e):

$$-\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\left(l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right),$$

und die beiden letzten Gleichungen führen zu der Bedingungsgleichung:

$$l\sqrt{\frac{P}{EI}} = \operatorname{tg}\left(l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{f)},$$

der die Belastung, die Dimensionen und die Elasticität des Stabes genügen müssen, wenn die vorausgesetzte Art der Biegung überhaupt möglich sein soll. Wird aber die Gleichung f) erfüllt, so sind von den drei Gleichungen c), d), e), aus denen die Unbekannten A, B, p gefunden werden müssten, nur zwei unabhängig, so dass, wenn etwa A und B durch p und die übrigen Grössen ausgedrückt worden sind, p gänzlich unbestimmt bleibt. Weil aber mit p auch die Grösse der Biegung und das Spannungsmoment jedes Querschnitts unbestimmt bleibt, so kann man nur dann von der erforderlichen Widerstandsfähigkeit des Stabes überzeugt sein, wenn man P so bestimmt, dass die vorausgesetzte Biegung gar nicht eintreten kann. Dieses ist, wenn die wesentlich positive Grösse $l\sqrt{\frac{P}{EI}} = \alpha$ gesetzt wird, mit Rücksicht auf die Gleichung f) dann der Fall, wenn α kleiner ist, als die kleinste positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha.$$

Durch Probiren findet man den kleinsten positiven Winkel, welcher dieser Gleichung entspricht, und von welchem man von vornherein weiss, dass er zwischen 180° und 270° liegt:

$$\alpha = 257^\circ\, 27'\, 12''$$

oder in Bogenmaass:

$$\alpha = 4{,}4934.$$

Damit also der Stab durch den Druck P nicht zerknickt werde, muss

$$l\sqrt{\frac{P}{EI}} < 4{,}4934$$

oder

$$P < (4{,}4934)^2 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

oder

$$P < 2{,}0457 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

sein, oder fast genau:

$$P < 2\pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

wie oben angegeben wurde.

Wenn nun die Belastung berechnet werden soll, welche eine Stütze u. s. w. von gegebenen Dimensionen mit Sicherheit tragen kann, oder wenn umgekehrt die Querschnittsdimensionen der Bedingung gemäss berechnet werden sollen, dass die Stütze bei gegebener Länge eine gegebene Belastung mit Sicherheit tragen könne, so muss man erwägen, dass ein Stab um so eher zerquetscht als zerknickt wird, je kürzer, und um so eher zerknickt wird, je länger er ist. Demgemäss muss man die einfache oder zusammengesetzte rückwirkende Festigkeit der Rechnung zum Grunde legen, je nachdem die erste oder die zweite die kleinere Belastung, respective die grösseren Dimensionen bei gegebener Belastung bedingt. Wo die Wahl zweifelhaft ist, muss man unter beiden Voraussetzungen die Rechnung anstellen, und die Resultate vergleichen.

Beispiel. Der Kolben einer doppeltwirkenden Hochdruckdampfmaschine, welche mit einer Dampfspannung von 4 Atmosphären Ueberdruck arbeitet, habe den Durchmesser von $D = 60$ Centimeter. Welchen Durchmesser $= d$ muss die schmiedeeiserne Kolbenstange haben, wenn sie die Länge $l = 200$ Centimeter hat, und wenn ihr aus dem Cylinder hervorragendes Ende drehbar mit einer geradlinig geführten Traverse verbunden ist?

Die Kolbenfläche, auf welche die Dampfspannung wirkt, beträgt:

$$\frac{\pi D^2}{4} = 2827{,}4 \text{ Quadratcentimeter},$$

und weil eine Dampfspannung von 1 Atmosphäre einem Drucke = 1,033 Kilogramme auf 1 Quadratcentimeter entspricht, so ist der wirksame oder Ueberdruck auf den ganzen Kolben:

$$P = 2827{,}4 \cdot 1{,}033 \cdot 4 = 11683 \text{ Kilogramme}.$$

Diesem Drucke muss die Kolbenstange, wenn der Kolben sich nach der einen Richtung bewegt, durch ihre absolute, wenn er sich nach der entgegengesetzten Richtung bewegt, durch ihre rückwirkende Festigkeit mit Sicherheit Widerstand leisten können. In Bezug auf absolute sowohl als auf einfache rückwirkende Festigkeit darf das Schmiedeeisen für jedes Quadratcentimeter des Querschnitts mit 650 Kilogrammen belastet werden (§. 3 und 6); demgemäss wäre der erforderliche Durchmesser durch die Gleichung:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot 650 = 11683$$

bestimmt, woraus

$$d = 4{,}78 \text{ Centimeter}$$

sich ergiebt. — Rücksichtlich der zusammengesetzten rückwirkenden Festigkeit befindet sich die Kolbenstange in demjenigen der im Vorhergehenden betrachteten vier Fälle, auf welchen sich die Formel 2) dieses Paragraphen bezieht. Aus diesem Gesichtspunkte beurtheilt, würde also ihre erforderliche Stärke, weil

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (§. 7) und } E = 2000000 \text{ (§. 2)}$$

ist, und wenn fünffache Sicherheit verlangt wird, durch die Gleichung bestimmt sein:

$$5 \cdot 11683 = 2\pi^2 \cdot \frac{2000000 \cdot \frac{\pi d^4}{64}}{40000}$$

aus welcher

$$d = 5{,}9 \text{ Centimeter}$$

sich ergiebt. Die Kolbenstange wird also eher zerknickt, als zerquetscht. Man würde sie 6 Centimeter stark, vielleicht noch etwas stärker machen, falls man sich auf die genaue geradlinige Führung ihres drehbaren Endes nicht mit hinreichender Sicherheit verlassen könnte.

Was die älteren Versuche über die Belastungen betrifft, durch welche vertical stehende Stäbe zerknickt werden, so mögen hier nur die Hauptresultate erwähnt werden, welche Navier aus den von verschiedenen Experimentatoren angestellten Versuchen zusammengestellt hat. Ihnen zufolge beträgt die Belastung, durch welche ein mit beiden Enden gestützter Stab von rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt zerknickt wird, von derjenigen Belastung, durch welche ein aus demselben Material gefertigter Würfel von gleichem Querschnitt zerquetscht wird, wenn l die Länge, d die Dicke (die in die Biegungsebene fallende Querdimension) des Stabes bezeichnet,

für Holz: $\frac{5}{6}$, wenn $l = 12d$; $\frac{1}{2}$, wenn $l = 24d$;

für Schmiedeeisen: $\frac{5}{6}$, wenn $l = 12d$; $\frac{1}{2}$, wenn $l = 24d$;

für Gusseisen: $\frac{2}{3}$, wenn $l = 4d$; $\frac{1}{2}$, wenn $l = 8d$; $\frac{1}{15}$, wenn $l = 36d$ ist.

Im Allgemeinen soll man nach Navier, sobald die Länge ungefähr das Zwanzigfache der Dicke übertrifft, die theoretischen Formeln der zusammengesetzten rückwirkenden Festigkeit

zum Grunde legen, in der Gewissheit, dass die Tragfähigkeiten, welche sie liefern, die erfahrungsmässigen nicht übertreffen.

Bei jenen Versuchen ist jedoch auf den Einfluss der Abrundung der Endflächen der Stützen nicht die erforderliche Rücksicht genommen worden, welcher Einfluss gleichwohl nicht nur der Theorie, sondern auch genaueren Versuchen zufolge sehr wesentlich ist. Solche sind von HODGKINSON mit Säulen von Guss- und Schmiedeeisen und von Holz angestellt worden. Danach werden cylindrische Stützen, deren Enden abgerundet sind (zweiter Fall), eher zerknickt als zerquetscht, wenn ihre Länge den 15fachen Durchmesser übertrifft, solche aber, deren Enden flach sind (vierter Fall), wenn ihre Länge den 30fachen Durchmesser übertrifft. Dass im letztern Falle das fragliche Verhältniss der Länge zum Durchmesser doppelt so gross ist, als im erstern, stimmt genau mit der Theorie überein, wenn auch beide Verhältnisszahlen an und für sich wegen des verschiedenen Verhältnisses des Elasticitätsmodulus zu dem Maasse der einfachen rückwirkenden Festigkeit für die verschiedenen Materialien verschieden sein sollten. Bezeichnet nämlich K das Maass der rückwirkenden Festigkeit, r den Radius, l die Länge der massiven cylindrischen Säule, so wird der Umstand, dass dieselbe ebenso leicht zerquetscht als zerknickt wird, bei abgerundeten Enden durch die Gleichung ausgedrückt:

$$K \cdot \pi r^2 = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot \frac{\pi r^4}{4}}{l^2}, \quad \text{woraus} \quad \frac{l}{2r} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{E}{K}},$$

bei flach abgeschnittenen Enden durch die Gleichung:

$$K \cdot \pi r^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot \frac{\pi r^4}{4}}{l^2}, \quad \text{woraus} \quad \frac{l}{2r} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{K}}$$

folgt.

Die Hauptresultate der HODGKINSON'schen Versuche, auf das Centimeter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit reducirt, sind in folgender Tabelle enthalten:

Beschaffenheit der Säulen.	Beide Enden abgerundet. $L > 15\,D$	Beide Enden flach. $L > 30\,D$
Massive cylindrische Säule aus Gusseisen	$P = 151625 \frac{D^{3{,}76}}{L^{1{,}7}}$	$P = 546548 \frac{D^{3{,}55}}{L^{1{,}7}}$
Hohle cylindrische Säule aus Gusseisen	$P = 132291 \frac{D^{3{,}76} - d^{3{,}76}}{L^{1{,}7}}$.	$P = 548775 \frac{D^{3{,}55} - d^{3{,}55}}{L^{1{,}7}}$
Massive cylindrische Säule aus Schmiedeeisen	$P = 1214035 \frac{D^{3{,}76}}{L^2}$	$P = 4614484 \frac{D^{3{,}55}}{L^2}$
Quadratischer Balken aus trockenem Danziger Eichenholze		$P = 248338 \frac{D^4}{L^2}$
Quadratischer Balken aus trockenem Fichtenholze		$P = 177125 \frac{D^4}{L^2}$

L ist die Länge der Säulen, D der äussere Durchmesser oder die Seite des quadratischen Querschnitts, d der innere Durchmesser der hohlen Säulen. Man sieht, dass die Form des Ausdrucks, durch welchen das zerknickende Gewicht P als Function der Dimensionen der Säule bestimmt wird, nur bei hölzernen dieselbe ist, welche sie der Theorie zufolge sein soll, dass aber die Tragfähigkeit gusseiserner Säulen nicht der zweiten, sondern nur der 1,7ten Potenz der Länge umgekehrt proportional ist, dass sie ferner bei Säulen von Gusseisen sowohl als von Schmiedeeisen nicht der vierten Potenz der Dicke, sondern bei abgerundeten Enden der 3,76ten, bei flachen Enden nur der 3,55ten Potenz dieser Dimension proportional ist. Im

Uebrigen ist die Abweichung von den Ergebnissen der Theorie nicht allzu beträchtlich; die Tragfähigkeit ist auch nach diesen Versuchen nahezu vier mal so gross, wenn die Enden flach, als wenn sie abgerundet sind, und ausserdem fand sie HODGKINSON für den Fall, dass ein Ende flach abgeschnitten, das andere abgerundet war (dritter Fall), ungefähr gleich dem arithmetischen Mittel aus jenen beiden.

Wenn die Länge einer Säule ihren Durchmesser zwar bedeutend übertrifft, ohne jedoch 15, respective 30 mal so gross zu sein, so lässt sich theoretisch der Einfluss der Länge nicht weiter in Betracht ziehen, welcher gleichwohl, wie sich erwarten lässt, nicht plötzlich verschwindet. HODGKINSON giebt für solche Fälle die folgende empirische Formel für das zerdrückende Gewicht P:

$$P = \frac{P_1 \cdot P_2}{P_1 + \frac{3}{4} P_2},$$

in welcher P_1 die aus der entsprechenden Formel der obigen Tabelle zu berechnende Belastung, P_2 aber das Gewicht bedeutet, durch welches die Säule bei sehr geringer Höhe einfach zerquetscht werden würde. — Endlich ist von den in Rede stehenden Versuchen noch das Resultat bemerkenswerth, dass die Tragfähigkeit einer gusseisernen Säule, die in der Mitte ihrer Länge auf den $1\frac{1}{2}$- bis 2fachen Durchmesser verstärkt ist, ungefähr um $\frac{1}{8}$ grösser ist, als diejenige einer genau cylindrischen Säule von derselben Länge und demselben Gewicht.

Den Durchmesser der Kolbenstange in dem zuvor behandelten Beispiele kann man mit Rücksicht auf die obige Tabelle und den mitgetheilten Erfahrungssatz hinsichtlich des dritten Falles bei fünffacher Sicherheit aus der Näherungsformel berechnen:

$$5 \cdot 11683 = \frac{1214035 + 4614184}{2} \cdot \frac{d^{\frac{3,76+3,55}{2}}}{40000},$$

woraus

$$d = 6,2 \text{ Centimeter}$$

sich ergiebt, in naher Uebereinstimmung mit dem zuvor erhaltenen Resultat.

Zur Theorie:

1770—73. LAGRANGE *Sur la fig. des colonnes. Mél. de phil. et de mathém. de la soc. de Turin.* p. 213.
1778. EULER Acta acad. Petrop.
1811. POISSON *Traité de méc.* I. p. 212*.
1833. *NAVIER *Rés. des leç. sur l'applic. de la méc.* I. — Deutsch von WESTPHAL u. d. T.: „Mech. d. Baukunst." 1851. p. 190*.
1838. MINDING Handb. d. theor. Mech. p. 139.

Versuche:

1833. NAVIER s. ob. Deutsch v. WESTPHAL. p. 195. Anh. p. 349. (Vers. v. HODGKINSON.)
1840. BARLOW Phil. Trans. (Ber. üb. d. Vers. v. HODGKINSON.) Dieselben Vers. s. auch: WEISSBACH Ing. u. Masch. Mech. 1850. I. p. 292.

VI. Torsionselasticität und Festigkeit.

§. 20. Möglichst vereinfachte Theorie der Torsionselasticität.

Torsionselasticität und Festigkeit eines prismatischen Körpers nennt man den Widerstand, welchen derselbe der Verdrehung oder Torsion, respective der Abdrehung oder Abwürgung in Folge von Kräften entgegensetzt, die rechtwinkelig gegen seine Axe gerichtet sind, ohne sie zu schneiden. Die Wirkung solcher Kräfte besteht zwar nicht ausschliesslich in einer Verdrehung und den damit

unmittelbar zusammenhängenden Verrückungen der kleinsten Theile, sondern im Allgemeinen zugleich in einer Biegung des Körpers, so dass derselbe seiner Formänderung gleichzeitig vermöge seiner Torsions- und relativen Elasticität Widerstand leistet; da es aber bei technischen Constructionen auch häufig der Fall ist, dass die Biegung entweder ganz verhindert wird, oder wenigstens ohne einen in Betracht kommenden Fehler vernachlässigt werden darf — z. B. bei einer Welle, falls die Räder, womit sie die Betriebskraft einer Maschine empfängt und fortpflanzt, sich dicht an den Enden befinden, und die Welle ausserdem nicht so lang ist, dass sie durch ihr eigenes Gewicht merklich gebogen werden könnte — so ist es von Nutzen, der Untersuchung der zusammengesetzten Erscheinung diejenige der Torsion an und für sich vorhergehen zu lassen, nachdem die Biegung bereits früher (3. Abschnitt) unabhängig von andern Umständen in Betracht gezogen worden ist.

Um die Ursachen der Biegung von denjenigen der Torsion zu trennen, sei P irgend eine der belastenden Kräfte, p der normale oder kürzeste Abstand ihrer Richtungslinie von der Axe, O der Fusspunkt dieses kürzesten Abstandes in der Axe oder derjenige Punkt derselben, dessen zugehörige Normalebene (Querschnittsebene des prismatischen Körpers) die Kraft P in sich enthält. Denkt man sich diese Kraft durch die ihr gleiche und gleich gerichtete im Punkte O angreifende Kraft P' und durch das Kräftepaar vom Momente Pp ersetzt, und die entsprechende Verwandelung der übrigen Kräfte P vorgenommen, so haben die Kräfte P' bekanntlich die Biegung des Körpers zur Folge, so dass seine Torsion nur den in den Querschnittsebenen wirksamen Kräftepaaren zugeschrieben werden kann. Indem wir also jene Kräfte P', wozu auch das eigene Gewicht des Körpers und die Widerstände der etwa vorhandenen Stützpunkte gehören, ausser Acht lassen, setzen wir den Körper unter der alleinigen Einwirkung der auf seiner Axe senkrechten Kräftepaare im Gleichgewicht befindlich voraus. Wir unterstellen dabei:

1. dass das Material entweder isotrop, oder wenigstens homogen sei und eine mit der Axe des Körpers parallele Elasticitätsaxe habe.

Betrachten wir nun, falls es mehrere Paare sind, die auf den Körper wirken, ein solches Stück AB desselben, welches zwischen den Ebenen zweier Kräftepaare, oder zwischen der Ebene eines solchen Paares und einem Querschnitt enthalten ist, in welchem der Körper befestigt sein kann. Sämmtliche Querschnitte dieses Körperstücks denken wir materiell, d. h. als die Oerter der im unbelasteten Zustande darin befindlichen materiellen Punkte, und fragen uns, welche Veränderungen mit ihnen, sowohl an und für sich, als in Beziehung zu den übrigen betrachtet, durch die Einwirkung der Kräftepaare hervorgebracht werden können. An und für sich betrachtet, können die materiellen Punkte eines solchen Querschnitts zunächst ohne Aenderung der ebenen Beschaffenheit desselben eine gegenseitige Verrückung erfahren, z. B. eine gegenseitige Annäherung, entsprechend einer Verdichtung des ganzen Körpers, wie sie allerdings erfahrungsmässig stattfindet; ausserdem können die Querschnitte krumme Flächen werden. Was ferner die Beziehung eines Querschnitts zu einem andern des Körperstücks AB betrifft, so erfährt er offenbar hauptsächlich eine Verdrehung

gegen denselben, welche um so grösser ist, je grösser das Moment M des resultirenden Paares ist, das durch Zusammensetzung des bei B wirksamen Paares mit den sämmtlichen über B hinaus auf den Körper etwa noch wirkenden Kräftepaaren erhalten wird. Wenn die erwähnten Veränderungen eines Querschnitts der Strecke AB, nämlich seine Verdichtung (Verkleinerung), seine Krümmung und seine Verdrehung gegen einen andern in einem gewissen Abstande davon befindlichen, lediglich das Resultat des resultirenden Paares M wären, so würde kein Grund vorhanden sein, weshalb diese Umstände von einem zum andern Querschnitt sich ändern sollten; da aber über B hinaus das Moment des resultirenden Paares ein anderes, vielleicht gar $= 0$, mithin auch die erwähnten Umstände hinsichtlich dieser über B hinaus liegenden Querschnitte andere sind, und dieselben bei B nicht plötzlich sich ändern können, so müssen sie ihren Einfluss in das Körperstück AB hinein erstrecken und dadurch bewirken, dass sowohl die Verdichtung und Krümmung eines materiellen Querschnitts des Körperstücks AB an und für sich, als auch seine Verdrehung gegen einen unendlich nahen andern innerhalb dieses Körperstücks veränderlich ist. Mit der Veränderlichkeit der Krümmung der Querschnitte ist nothwendigerweise eine örtliche Annäherung oder Entfernung derselben, also eine positive oder negative Ausdehnung in der Richtung der Axe des Körpers verbunden.

Der analytischen Schwierigkeiten wegen, mit welchen die Berücksichtigung der sämmtlichen eben erwähnten Umstände bei der Theorie der Torsionselasticität und Festigkeit verbunden sein würde, sowie mit Rücksicht auf die praktische Anwendbarkeit, also hinlängliche Einfachheit der zu erzielenden Formeln, sieht man sich genöthigt, von den mehr untergeordneten jener Umstände gänzlich zu abstrahiren. Wir wollen demnach

2. die Verdichtung des Körpers vernachlässigen, und annehmen,

3. dass die noch übrigen Umstände für alle Querschnitte einer solchen Strecke AB des Körpers durchaus dieselben seien, für welche das Moment M des resultirenden Paares dasselbe ist.

Von diesen Umständen, welche wir also einzig und allein in Betracht ziehen, nämlich der gegenseitigen Verdrehung und der gleichzeitigen Krümmung der materiell gedachten Querschnitte, ist wiederum der letztere im Vergleich mit ersterem von untergeordneter Bedeutung. — Die Verdrehung zweier unendlich nahe liegender Querschnitte kann als das Resultat ihrer von Punkt zu Punkt der Richtung und Grösse nach veränderlichen Verschiebungen betrachtet, der Widerstand dagegen somit auf die im vierten Abschnitt dieses Kapitels besprochene Schubelasticität zurückgeführt werden. Dabei haben mit Rücksicht auf obige dritte Annahme diejenigen Punkte der Querschnitte, um welche ihre Verdrehungen stattfinden oder in denen die Verschiebung $= 0$ ist, welche Punkte wir die Torsionspunkte nennen wollen, in allen dieselbe Lage; ihr geometrischer Ort oder die Torsionsaxe ist also eine mit der geometrischen Axe des Körpers parallele gerade Linie.

Die Krümmung der Querschnitte hat hauptsächlich nur den Einfluss, dass sie das Gesetz modificirt, nach welchem ihre gegenseitigen Verschiebungen von den Lagen der bezüglichen Punkte, wo sie stattfinden, abhängig sind. Um dieses

Gesetz so einfach als möglich zu erhalten, wollen wir zunächst auch von jener Krümmung abstrahiren, also annehmen:

4. dass die materiell gedachten Querschnitte des Körpers bei der Torsion nicht aufhören, eben zu bleiben.

Hiernach ist nun offenbar die Verschiebung eines Querschnitts in irgend einem Punkte A auf seiner Verbindungslinie OA mit dem Torsionspunkte O senkrecht und deren Länge proportional; und da sie zu der entsprechenden, im Punkte A stattfindenden Tangentialspannung τ bis zu einer gewissen Grenze, die wir stets als nicht überschritten voraussetzen, ein constantes Verhältniss hat (§. 17), welches der obigen ersten Voraussetzung wegen auch von der Verschiebungsrichtung, also von der Lage des Punktes A im Querschnitt, unabhängig ist, so ist auch diese in A auf OA senkrechte Tangentialspannung τ dem Abstande $OA = r$ proportional. Im Uebrigen ist sie dadurch bestimmt, dass der in dem betrachteten beliebigen Querschnitt abgeschnitten gedachte Körper unter der Einwirkung der Kräftepaare, deren resultirendes Moment $= M$ ist, und der in sämmtlichen Flächenelementen der durch die Zerschneidung entstandenen Endfläche äusserlich angebrachten totalen Tangentialspannungen derselben als freies und festes System im Gleichgewicht verharren muss. Aus den Bedingungen dieses Gleichgewichts ergiebt sich zunächst, dass der Torsionspunkt mit dem Schwerpunkte des Querschnitts, also die Torsionsaxe mit der geometrischen Axe des Körpers zusammenfällt. Ferner findet man, falls O das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts, d. h. die Summe der Producte aus seinen Flächenelementen und den Quadraten ihrer Entfernungen vom Schwerpunkte, bedeutet:

$$\tau = \frac{M \cdot r}{O} \quad \ldots \ldots \quad 1).$$

Ein vorzugsweiser Bruchquerschnitt ist der dritten Annahme wegen nicht vorhanden, also auch kein vorzugsweise gefährlicher Punkt, sondern eine gefährliche Linie (oder mehrere dergleichen), und zwar ist diese der geometrische Ort derjenigen Punkte aller Querschnitte, welche von deren Schwerpunkten am weitesten entfernt sind. Wenn diese weiteste Entfernung mit e bezeichnet und die in der gefährlichen Linie stattfindende specifische Tangentialspannung dem erfahrungsmässig zulässigen Grenzwerth t derselben gleich gesetzt wird, so erhält man aus 1) die Bedingungsgleichung:

$$t = \frac{M \cdot e}{O} \quad \ldots \ldots \quad 2),$$

aus welcher entweder die höchstens zulässige Grösse von M, oder die mindestens erforderliche Grösse einer gesuchten Querdimension berechnet werden muss.

Bedeutet endlich G den Modulus der Schubelasticität (§. 17) in Bezug auf Verschiebung eines Querschnitts in beliebiger Richtung, so findet man den specifischen Torsionswinkel ϑ, d. h. denjenigen durch die Länge eines zugehörigen Kreisbogens vom Radius $= 1$ gemessenen Winkel, welchen je zwei ursprünglich parallele materielle gerade Linien in je zwei um die Längeneinheit

von einander entfernten Querschnitten nach der Torsion mit einander bilden, durch die Gleichung:

$$\vartheta = \frac{M}{GO} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Um die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen dem Paare M und den Spannungen des beliebigen Querschnitts (*Fig.* 24) analytisch auszudrücken, mögen durch dessen Torsionspunkt O zwei auf einander senkrechte, übrigens beliebige Coordinatenaxen OY, OZ gelegt werden, in Bezug auf welche die Lage des beliebigen Punktes A entweder durch seine Coordinaten y und z, oder auch durch seinen Abstand $OA = r$ und den in der Richtung YZ von 0^0 bis 360^0 gerechneten Winkel $YOA = \alpha$ bestimmt werden kann. Die in einem den Punkt A enthaltenden unendlich kleinen Element $= dq$ des Querschnitts in der auf OA senkrechten Richtung stattfindende totale Tangentialspannung $= \tau \cdot dq$ werde nach den Richtungen OY und OZ in die Componenten $\tau_y \cdot dq$ und $\tau_z \cdot dq$ zerlegt, so erfordert das vorausgesetzte Gleichgewicht die Erfüllung der Gleichungen:

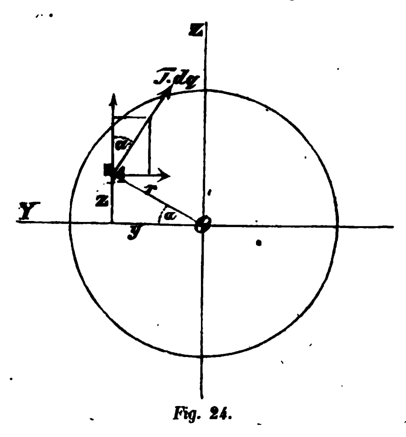


Fig. 24.

$$\int \tau_y \cdot dq = 0; \quad \int \tau_z \cdot dq = 0; \quad \int \tau \cdot dq \cdot r = M \quad \ldots \quad a),$$

wobei die Summenzeichen sich über den ganzen Querschnitt erstrecken. Damit in diesen Gleichungen zugleich die aus unseren Annahmen folgende Proportionalität zwischen τ und r ausgedrückt sei, möge $\tau = \tau_1 \cdot r$ gesetzt werden, also

$$\tau_y = -\tau \cdot \sin\alpha = -\tau_1 \cdot r\frac{z}{r} = -\tau_1 \cdot z$$

$$\tau_z = \tau \cdot \cos\alpha = \tau_1 \cdot r\frac{y}{r} = \tau_1 \cdot y,$$

wo τ_1 die überall im Abstande $= 1$ von O stattfindende specifische Tangentialspannung bedeutet; dann können sie auch folgendermassen geschrieben werden:

$$-\tau_1 \int z \cdot dq = 0; \quad \tau_1 \int y \cdot dq = 0; \quad \tau_1 \int r^2 \cdot dq = M \quad \ldots \quad b).$$

Die erste von ihnen lehrt nun, dass OY, die zweite, dass OZ den Schwerpunkt des Querschnitts enthalten muss; beide zusammen also, dass der Torsionspunkt O dieser Schwerpunkt selbst ist. Aus der letzten der Gleichungen b) ergiebt sich, falls die Function

$$\int r^2 \cdot dq = O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c)$$

und τ_1 wiederum $= \frac{\tau}{r}$ gesetzt wird, die oben referirte Relation 1). Die daraus abgeleitete 2) bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Zur Rechtfertigung der Gleichung 3) denke man in dem betrachteten beliebigen Querschnitt irgend eine durch O gehende gerade Linie, und in derselben den mate-

riellen Punkt B im Abstande $= 1$ von O, ferner in einem um die unendlich kleine Grösse $OO' = dx$ von ersterem entfernten Querschnitt diejenige durch dessen Schwerpunkt O' gehende materielle gerade Linie, welche vor der Torsion mit OB parallel war, und in derselben den materiellen Punkt B' gleichfalls im Abstande $= 1$ von O'. Dann ist $\mathfrak{T} \cdot dx$ der durch einen Kreisbogen vom Radius $= 1$ gemessene Winkel, welchen die Geraden OB und $O'B'$ bei der Torsion mit einander bilden, also die Länge des Kreisbogens BB'', welcher aus O als Mittelpunkt beschrieben den Punkt B mit der Projection B'' des Punktes B' auf den zuerst gedachten Querschnitt verbindet. Nun ist aber dieser unendlich kleine Bogen zugleich die im Punkte B stattfindende totale Verschiebung; die specifische Verschiebung γ_1 mithin:

$$\gamma_1 = \frac{BB''}{OO'} = \frac{\mathfrak{T} \cdot dx}{dx} = \mathfrak{T},$$

und weil der Definition der Constanten G zufolge

$$\frac{\tau_1}{\gamma_1} = G$$

ist, so hat man:

$$\mathfrak{T} = \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} = \frac{M : O}{G} = \frac{M}{GO}.$$

Schliesslich ist zu bemerken, dass die Function O der Summe der Trägheitsmomente des Querschnitts in Bezug auf irgend zwei durch seinen Schwerpunkt gehende auf einander senkrechte gerade Linien gleich ist, nämlich:

$$O = \int r^2 \cdot dq = \int (y^2 + z^2)\,dq = \int y^2 \cdot dq + \int z^2 \cdot dq,$$

für reguläre Querschnitte also, auf welche die im gegenwärtigen Paragraphen entwickelte Theorie vorzugsweise anwendbar ist, doppelt so gross, als das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine durch den Schwerpunkt gehende Gerade. Mit Rücksicht auf §. 7 hat man demnach die folgenden Ausdrücke:

	O	e	$\frac{O}{e}$
1. Kreis (Radius $= r$)	$\frac{\pi r^4}{2}$	r	$\frac{\pi r^3}{2}$
2. Quadrat (Seite $= a$)	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{6} a^3$
3. Reguläres Polygon (Inhalt $= F$, Seite $= s$, Radius des umbeschriebenen Kreises $= r$)	$\frac{F}{6}\left(3r^2 - \frac{s^2}{2}\right)$	r	$\frac{F}{6}\left(3r - \frac{s^2}{2r}\right)$

§. 21. Corrigirte Theorie der Torsionselasticität.

Die Resultate der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie der Torsionselasticität stimmen mit den Ergebnissen der Versuche um so mehr überein, je mehr die Form des Querschnitts sich der Kreisform nähert; wenn aber die Dimensionen desselben nach verschiedenen Richtungen beträchtlich verschieden

sind, so kann die Abweichung so gross werden, dass sich das Bedürfniss einer genaueren Theorie herausstellt.

Die Ursache jener Abweichung ist hauptsächlich darin zu suchen, dass die den Formeln des vorigen Paragraphen zum Grunde liegende einfache Beziehung zwischen der specifischen Tangentialspannung τ eines Punktes A und dessen Lage in dem betreffenden Querschnitt sich mit der Voraussetzung im Widerspruch befindet, derzufolge der Körper ausser den auf seiner Axe senkrechten Kräftepaaren keinerlei sonstigen Kraft unterworfen sein soll. Um diesen Widerspruch aufzudecken, wollen wir annehmen, dass A ein Punkt der cylindrischen oder prismatischen Oberfläche des Körpers sei, und durch denselben drei auf einander senkrechte Richtungen AS, AT, AN gezogen denken, so dass AS in die betreffende Seite der cylindrischen Fläche, AT in die Tangente des Umfangs des betreffenden Querschnitts, AN in dessen Normale fällt. Letztere Richtung AN würde nur dann immer durch den Schwerpunkt O des Querschnitts gehen, wenn dieser ein Kreis wäre; im Allgemeinen enthält sie denselben nicht. Wenn man also die Tangentialspannung des Querschnitts im Punkte A, welche den Annahmen des vorigen Paragraphen zufolge auf OA senkrecht ist, nach den Richtungen AT und AN zerlegt, so werden beide Componenten im Allgemeinen nicht $= 0$ sein. Nun müsste aber nach §. 17 b) diese letztere in der auf AS senkrechten (Querschnitts-) Ebene nach der Richtung AN stattfindende Tangentialspannung derjenigen gleich sein, welche in der auf AN senkrechten (Berührungs-) Ebene in der Richtung AS stattfindet, die letztere also im Allgemeinen auch nicht $= 0$ sein, was unmöglich ist, und überhaupt nur dann der Fall sein könnte, wenn auf die Oberfläche des Körpers in nicht normaler Richtung Kräfte wirkten, z. B. eine in der Längenrichtung stattfindende Reibung. — Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass im Allgemeinen die Tangentialspannung und somit auch die Verschiebung nicht in jedem Punkte A eines Querschnitts auf seiner Verbindungslinie mit dem Schwerpunkte O senkrecht sein kann, wie es die Formeln des vorigen Paragraphen voraussetzen, dass ihre Richtung vielmehr durch die Bedingung mitbestimmt werden muss, durch allmälige Aenderung von innen nach aussen für jeden Punkt des Umfangs endlich in diejenige der betreffenden Tangente überzugehen.

Wenn man sonach genöthigt ist, die in Rede stehende einfache Beziehung zwischen der Richtung und der dadurch mitbedingten Grösse der Verschiebung und Spannung zu der Lage des betreffenden Punktes fallen zu lassen, so muss man auch, falls man die drei ersten Annahmen des vorigen Paragraphen beibehält, jedenfalls die vierte aufgeben, da sie in Verbindung mit jenen diese als nicht stichhaltig erkannte Beziehung zur nothwendigen Folge haben würde. Um aber bei dem nunmehrigen Zugeständniss der Möglichkeit der Krümmung der Querschnitte und ihres Einflusses auf die Torsionselasticität für die Analyse eine einfache Grundlage zu gewinnen und diese dadurch wesentlich zu vereinfachen, wollen wir voraussetzen, dass der Querschnitt zwei auf einander senkrechte Symmetrieaxen habe. Der Durchschnittspunkt derselben ist natürlich der Schwerpunkt, und sie selbst sind die Schwerpunkts-Hauptaxen des Querschnitts. Alsdann können wir mit Beibehaltung der Annahmen 1 bis 3 des

vorigen Paragraphen die vierte hier durch die weniger weit reichende Annahme ersetzen:

4. dass die materiell gedachten Symmetrieaxen (Schwerpunkts-Hauptaxen) irgend eines Querschnitts beständig auf einander und auf der geometrischen Axe des prismatischen Körpers senkrechte gerade Linien bleiben.

In der That fallen für die Punkte der Symmetrieaxen, da sie mit den ihren Endpunkten entsprechenden Normalen der Peripherie des Querschnitts zusammen fallen, die Rücksichten fort, welche die vierte Annahme des vorigen Paragraphen in der dortigen Ausdehnung unzulässig machen, und wenn man auch einen Einfluss der in den übrigen Punkten des Querschnitts vorhandenen Umstände auf jene der Symmetrieaxen zugeben muss, so ist dieser doch offenbar von beiden Seiten her ein entgegengesetzter und in seiner Gesammtwirkung $= 0$. — Der vorausgesetzten Symmetrie wegen ist zudem kein Grund denkbar, weshalb der Torsionspunkt ein anderer, als der Schwerpunkt sein sollte, der hier zugleich ein geometrischer Mittelpunkt ist, und man darf also von vornherein annehmen, dass die Torsionsaxe mit der geometrischen Axe des Körpers zusammenfällt.

Um nun die Bedingungsgleichung für die Erfüllung der Forderung zu erhalten, dass die mit der Torsion verbundene specifische Tangentialspannung in keinem Punkte einen als höchstens zulässig gegebenen Werth t überschreite, muss zunächst die specifische Tangentialspannung τ in einem beliebigen materiellen Punkte A als Function seines Ortes in dem betreffenden Querschnitt, als Function ferner der Querdimensionen des Körpers und des resultirenden Momentes M entwickelt werden. Die Lage des Punktes A wird dabei am zweckmässigsten durch seine Coordinaten y, z in Bezug auf die Symmetrieaxen OY, OZ des Querschnitts bestimmt, und wenn er auch durch die Krümmung des letzteren in einen gewissen Abstand $= \xi$ von der Ebene YOZ versetzt werden sollte, so ist doch ξ selbst eine Function von y und z. Die resultirende specifische Tangentialspannung τ im Punkte A berührt die krumme Fläche, in welche sich der Querschnitt verwandelt haben kann; da aber diese Krümmung jedenfalls gering ist, so darf jene Spannung näherungsweise derjenigen gleich gesetzt werden, welche im Punkte A einer auf der Torsionsaxe OX senkrechten Ebene stattfindet. Bezeichnet man die Componenten der letzteren nach den Richtungen OY und OZ mit τ_y und τ_z, so setzt man also $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$, und berücksichtigt den Einfluss der Krümmung nur insofern, als diese Componenten τ_y und τ_z dadurch modificirt werden. Nun besteht das Verfahren, welches man anzuwenden hat, um letztere zu entwickeln, nach Poisson und Cauchy darin, dass man sie als ganze Functionen von y und z, also von der allgemeinen Form:

$$a + by + cz + dy^2 + eyz + fz^2 + gy^3 + \ldots,$$

voraussetzt (nach der Theorie des vorigen Paragraphen ist einfach $\tau_y = -\tau_1 \cdot z$, $\tau_z = \tau_1 \cdot y$), die höheren Glieder vernachlässigt, und die Coefficienten der mehr oder weniger übrigen in Betracht gezogenen Glieder als Functionen von M und der Querdimensionen zu bestimmen sucht mit Rücksicht

1) auf das Gleichgewicht zwischen den Tangentialspannungen $\tau_y \cdot dq$ und $\tau_z \cdot dq$ der Flächenelemente dq des Querschnitts und des resultirenden Paares M, mit Rücksicht 2) auf die allgemeinen aus der Molecularmechanik bekannten Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äusseren und inneren Kräften (Spannungen) an einem materiellen Punkt im Inneren eines homogenen elastischen Körpers, und endlich 3) mit Rücksicht darauf, dass die Peripherie des Querschnitts von den Richtungslinien der in ihren Punkten stattfindenden resultirenden Spannungen τ berührt werden muss. Dabei ist die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung offenbar mit einem um so geringeren Fehler verbunden, je kleiner die Querdimensionen, nämlich die Grenzwerthe von y und z, sind.

Bei der Berücksichtigung des letzten der soeben bemerkten drei Umstände wird es jedoch nöthig, die Allgemeinheit der Analyse noch mehr einzuschränken, als es bereits durch die vorausgesetzte Symmetrie des Querschnitts geschehen ist; seine Form muss vollkommen bestimmt werden. Um aber dessenungeachtet ein Resultat zu erhalten, das näherungsweise als allgemein gültig angenommen werden darf, wählen wir mit Poncelet das Rechteck und die Raute als diejenigen beiden Formen, welche zugleich die einfachsten sind und gewissermassen als zwei äusserste Grenzfälle betrachtet werden können, indem das Rechteck in den Richtungen der Symmetrieaxen in auf denselben senkrechten geraden Linien, die Raute in Punkten sich endigt. Insoweit dann die Resultate der für beide besonders durchgeführten Analyse übereinstimmen, halten wir uns berechtigt, denselben mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen eine allgemeinere Gültigkeit zuzuschreiben, z. B. gewiss für einen elliptischen Querschnitt, der zwischen dem umbeschriebenen Rechteck und der einbeschriebenen Raute in der Mitte liegt.

Man findet nun für das Rechteck und die Raute übereinstimmend:

$$\tau_y = -\frac{M}{2B} \cdot z; \quad \tau_z = \frac{M}{2C} \cdot y \quad \ldots \ldots \quad 1),$$

unter B und C die Trägheitsmomente

$$B = \int z^2 \cdot dq; \quad C = \int y^2 \cdot dq$$

des Querschnitts in Bezug auf die Axen OY und OZ verstanden; Glieder zweiter Ordnung kommen nämlich nicht vor, und diejenigen der dritten Ordnung weichen schon von einander ab. Hiernach ist:

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

und die Bedingungsgleichung für die Erfüllung der Forderung, dass die specifische Tangentialspannung höchstens $= t$ sei, wird folgende:

$$t = \frac{M}{2} \cdot \max. \sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}} \quad \ldots \ldots \quad 3).$$

Wenn $B = C$ ist, so stimmen die Formeln 2) und 3) mit 1) und 2) des vorigen Paragraphen überein, indem alsdann $2B = O$ wird, während $\sqrt{y^2 + z^2} = r$ ist.

Für einen **rechteckigen Querschnitt**, dessen mit den Axen OY und OZ parallele Seiten beziehungsweise $= 2b$ und $2c$ sind, ist die Function

$$\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}$$

und mit ihr die resultirende Spannung am grössten für $y = \pm b$, $z = \pm c$, d. h. in den vier Eckpunkten, und die Gleichung 3) geht demgemäss in folgende über:

$$t = \frac{3}{8} M \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4).$$

Ihr entspricht für $b \gtrless c$ immer ein kleinerer Werth des höchstens zulässigen Momentes M, als der Formel 2) des vorigen Paragraphen, und zwar wird sein Verhältniss zu diesem um so kleiner, und zwar beliebig klein, je mehr das Verhältniss der Seiten des Rechtecks sich von der Einheit entfernt. — Wenn man die Glieder dritter Ordnung in den Ausdrücken von τ_y und τ_z berücksichtigt, so findet man die resultirende Spannung nicht in den Endpunkten, sondern in den Mittelpunkten der längeren Seiten des Rechtecks am grössten, während sie dort $= 0$ ist. Indem man diese grösste Spannung $= t$ setzt, erhält man, unter $2c$ die längere Seite verstanden, die Gleichung:

$$t = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{b^2 c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5),$$

welcher unter allen Umständen ein noch kleinerer zulässiger Werth von M entspricht, als der Gleichung 4), und zwar nähert sich sein Verhältniss zu diesem, von $\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}94\ldots$ (für das Quadrat) anfangend, um so mehr der Grenze $\frac{2}{3}$, je mehr das Verhältniss $c : b$ zunimmt. Die Formel 5) ist also zugleich die einfachste und sicherste zur Berechnung des höchstens zulässigen Momentes M oder der wenigstens erforderlichen Querdimensionen b und c für einen prismatischen Körper von rechteckigem Querschnitt.

Unter dem **specifischen Torsionswinkel** hat man hier denjenigen Winkel zu verstehen, den die ursprünglich parallelen Symmetrieaxen zweier um die Längeneinheit von einander entfernter Querschnitte bei der Torsion mit einander bilden. Ist ϑ die Länge des zu demselben als Mittelpunktswinkel gehörigen Kreisbogens, durch den Radius als Einheit gemessen, so findet man bei Zugrundelegung der Ausdrücke 1) von τ_y und τ_z:

$$\vartheta = \frac{M}{G \cdot \frac{4BC}{B + C}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

unter G den Modulus der Schubelasticität bezüglich der Verschiebung einer auf der geometrischen und ausgezeichneten Elasticitätsaxe senkrechten Ebene (eines Querschnitts) in beliebiger Richtung verstanden. Für $B = C$ ist diese Gleichung mit der entsprechenden 3) des vorigen Paragraphen identisch. Wenn aber die Hauptträgheitsmomente ungleich sind, so entspricht der Formel 6) unter allen

Umständen ein grösserer Werth von $\mathfrak{T}$, als der Formel 3) des vorigen Paragraphen, und es wird sein Verhältniss zu diesem um so grösser, und zwar beliebig gross, je mehr das Verhältniss $B : C$ sich von der Einheit entfernt. — Man erhält übrigens für $\mathfrak{T}$ auch dann noch einen übereinstimmenden Werth, wenn man in den abweichenden Ausdrücken von τ_y und τ_z, die sich auf die rechteckige und rhombische Querschnittsform beziehen, die Glieder dritter Ordnung in Betracht zieht; man findet nämlich:

$$\mathfrak{T} = \frac{\frac{3}{2} M}{G \cdot \frac{4BC}{B+C}} \quad \text{. . . . . 7).}$$

Indessen scheint die Wahrheit zwischen diesen beiden Ergebnissen der Analyse zu liegen; und wenn man

$$\mathfrak{T} = \frac{\alpha \cdot M}{G \frac{4BC}{B+C}} \quad \text{. . . . . 8)}$$

setzt, so scheint ausserdem aus der Vergleichung dieser Formel mit den Ergebnissen der Versuche geschlossen werden zu dürfen, dass der Coefficient α von der Querschnittsform in der Weise abhängt, dass er für den Kreis am kleinsten ist, und wachsend der Grenze $\frac{3}{2}$ um so mehr sich nähert, je mehr die Form des Querschnitts von der Kreisform und das Verhältniss seiner Hauptträgheitsmomente von der Einheit sich entfernt.

Sämmtliche Formeln dieses Paragraphen, welche durch Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung in den Ausdrücken von τ_y und τ_z erhalten worden sind, können auch in dem Falle, wo der Querschnitt nicht zwei auf einander senkrechte Symmetrieaxen hat, wenigstens mit grösserer Zuverlässigkeit, als diejenigen des vorigen Paragraphen angewendet werden, wenn man unter OY und OZ die Schwerpunkts-Hauptaxen versteht. Nur vernachlässigt man bei ihrer Anwendung in diesem Falle ausser den Gliedern dritter auch diejenigen der zweiten Ordnung, welche bei einer symmetrischen Querschnittsform nicht vorkommen.

Um schliesslich den Beweis zu führen, dass die Voraussetzung einer beständig ebenen Beschaffenheit der materiell gedachten Querschnitte mit der in diesem Paragraphen durchgeführten Analyse unverträglich gewesen wäre, kann man sich die Aufgabe stellen, die Gleichung des geometrischen Ortes derjenigen materiellen Punkte, welche sich ursprünglich in der Ebene YZ der Hauptaxen eines Querschnitts befanden, für den Zustand der Torsion annähernd zu bestimmen, was dadurch geschieht, dass man die Entfernung eines beliebigen materiellen Punktes dieses Querschnitts von der Ebene YZ, d. h. seine Verrückung ξ in der Richtung OX, als Function seiner Coordinaten y, z entwickelt. Setzt man zu dem Ende

$$\xi = a + by + cz + dy^2 + eyz + fz^2 + \ldots,$$

so kann man zunächst bemerken, dass, weil nach der vierten Annahme $\xi = 0$ werden muss, wenn $y = 0$ oder $z = 0$ gesetzt wird, in jener nach steigenden ganzen Potenzen von y und z fortschreitenden Reihe nur solche Glieder vorkommen können, welche sowohl y als z enthalten. Vernachlässigt man also die Glieder von der dritten Ordnung an, so kann einfach

$$\xi = eyz$$

gesetzt werden, und man findet

$$e = \frac{B - C}{B + C} \cdot \vartheta \qquad \qquad 9).$$

Hiernach verwandelt sich der materiell gedachte Querschnitt durch die Torsion in eine windschiefe Fläche, welche aus vier congruenten Theilen besteht, die durch die Axen OY, OZ von einander getrennt werden, und von denen zwei gegenüberliegende vor die Ebene YZ, die beiden andern gegenüberliegenden hinter dieselbe treten. Diese Fläche ist um so schiefer, je mehr die Hauptträgheitsmomente B und C verschieden sind; sie geht in eine Ebene über und rechtfertigt dadurch die vierte Annahme des vorigen Paragraphen, falls $B = C$ ist. Dabei muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Gleichung 9) nur in der unmittelbaren Nähe des Schwerpunktes, wo die höheren Glieder in dem Ausdrucke von ξ gegen die niederen thatsächlich verschwinden, als genaue Gleichung des in Rede stehenden geometrischen Ortes anzusehen ist, und dass im Widerspruche mit derselben die im Allgemeinen ungleiche Spannung, welche in zwei vom Schwerpunkte O gleich weit entfernten Punkten der Axen OY, OZ stattfindet, offenbar auch mit einer ungleichen Neigung der windschiefen Fläche gegen die Ebene YZ in jenen Punkten verbunden sein wird.

Wenn wir, um die den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Ausdrücke von τ_y und τ_z zu finden, im Allgemeinen

$$\tau_y = a + by + cz + dy^2 + eyz + fz^2 + gy^3 + \ldots$$

setzen, so dürfen wir die Coefficienten einer grossen Zahl von Gliedern dieser Reihe von vornherein $= 0$ voraussetzen. Sind nämlich A, A_1, A_2, A_3 (*Fig. 25*) solche vier Punkte eines Querschnitts, deren Coordinaten absolut gleich sind, so ist zunächst klar, dass, wenn im Punkte A die Spannungscomponenten τ_y und τ_z die durch die Pfeile angedeuteten Richtungen haben, alsdann die in den übrigen Punkten angebrachten Pfeile die entsprechenden Richtungen der in ihnen angreifenden Spannungscomponenten angeben; und weil zudem der Symmetrie des Querschnitts wegen offenbar angenommen werden muss, dass die absoluten Werthe dieser beiden Componenten in den Punkten A_1, A_2, A_3 dieselben sind, wie im Punkte A, so muss der Ausdruck von τ_y so beschaffen sein, dass sein Werth weder der absoluten Grösse, noch dem Vorzeichen nach sich ändert, wenn y entgegengesetzt genommen wird, dass

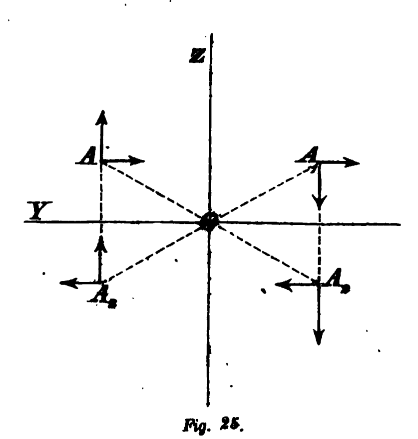


Fig. 25.

er aber selbst der entgegengesetzte wird, wenn man z entgegengesetzt nimmt. Hieraus folgt, dass in dem Ausdrucke von τ_y nur Glieder mit geraden Potenzen von y und ungeraden Potenzen von z vorkommen können, dass man also

$$\tau_y = m \cdot z + m_1 \cdot y^2 z + m_2 \cdot z^3 \quad \ldots \ldots \quad a)$$

setzen darf, und dabei nur die Glieder von der fünften und den höheren Ordnungen vernachlässigt. In gleicher Weise darf

$$\tau_z = n \cdot y + n_1 \cdot y z^2 + n_2 \cdot y^3 \quad \ldots \ldots \quad b)$$

gesetzt werden.

Zur Bestimmung der sechs Constanten m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 hat man nun zunächst die folgenden, den Gleichungen a) des vorigen Paragraphen entsprechenden Bedingungsgleichungen für das Stattfinden des Gleichgewichts zwischen den Tangentialspannungen $\tau_y \cdot dq$ und $\tau_z \cdot dq$ sämmtlicher Flächenelemente des Querschnitts und dem resultirenden Kräftepaare M:

$$\int \tau_y \cdot dq = 0; \quad \int \tau_z \cdot dq = 0; \quad \int (\tau_z \cdot y - \tau_y \cdot z)\, dq = M \quad . \; . \quad c).$$

Die beiden ersten derselben lehren jedoch hier nichts; denn da der vorausgesetzten Symmetrie wegen

$$\int z \cdot dq = \int y^2 z \cdot dq = \int z^3 \cdot dq = \int y \cdot dq = \int y z^2 \cdot dq = \int y^3 \cdot dq = 0$$

ist, so finden sich dieselben durch die Ausdrücke von τ_y und τ_z unabhängig von den Werthen der Coefficienten $m, m_1 \ldots n_2$ erfüllt. Wenn man aber diese Ausdrücke in der dritten Gleichung c) substituirt, so erhält man:

$$nC - mB + (n_1 - m_1) \int y^2 z^2 \cdot dq + n_2 \int y^4 \cdot dq - m_2 \int z^4 \cdot dq = M \quad . \; . \quad d),$$

wo B und C die Trägheitsmomente des Querschnitts in Bezug auf die Hauptaxen OY und OZ bedeuten.

Die zur Bestimmung der Constanten in den Ausdrücken a) und b) ferner in Betracht zu ziehenden allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den äussern und innern Kräften an einem beliebigen materiellen Punkte im Inneren des Körpers, hinsichtlich deren Begründung auf die bezügliche theoretische Abtheilung dieses Handbuchs oder auf die im §. 17 citirten Schriften verwiesen werden muss, sind folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} &= -\delta X \\ \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} &= -\delta Y \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} &= -\delta Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad e),$$

wo die sechs Grössen p dieselben Bedeutungen haben wie in den Gleichungen a) und b) des §. 17, wo ferner δ die ursprüngliche Dichte oder specifische Masse in irgend einem Punkte des homogenen Körpers, und X, Y, Z die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten der auf den betrachteten materiellen Punkt wirkenden specifischen (auf die Masseneinheit bezogenen) resultirenden äussern

Kraft bedeuten. Letztere könnte im vorliegenden Falle nur die Schwere sein, von der wir jedoch abstrahiren, so dass

$$X = Y = Z = 0$$

ist, und weil wir zudem von den drei Normalspannungen p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} und den drei Tangentialspannungen p_{xy}, p_{xz}, p_{yz} unsern Annahmen zufolge nur die beiden Tangentialspannungen p_{xy} und p_{xz} in Betracht ziehen, die wir für $x = 0$, d. h. für den beliebigen Punkt A des Querschnitts YOZ, bereits mit τ_y und τ_z bezeichnet haben, also auch

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{yz} = 0$$

ist, so reduciren sich die Gleichungen e) auf folgende:

$$\frac{d\tau_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dz} = 0; \quad \frac{d\tau_y}{dx} = 0; \quad \frac{d\tau_z}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{f)},$$

von welchen nur die erste zur Bestimmung der Constanten m, $m_1 \ldots n_2$ beitragen kann, da die beiden letzten wegen der Unabhängigkeit der Grössen τ_y und τ_z von x sich von selbst erfüllt finden. Die erste aber liefert mit Rücksicht auf die Ausdrücke a) und b) die Gleichung:

$$m_1 \cdot 2yz + n_1 \cdot 2yz = 0,$$

also

$$m_1 + n_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{g)}.$$

Ausser den Gleichungen d) und g) müssen nun zur Bestimmung der sechs Constanten m, $m_1 \ldots n_2$ noch vier andere aus der Bedingung entnommen werden, der zufolge die Peripherie des Querschnitts von der Richtung der resultirenden Spannung τ in allen ihren Punkten berührt werden muss. Zu diesem Zwecke sehen wir uns, wie bereits früher bemerkt, genöthigt, die Allgemeinheit der Analyse aufzugeben, und es mag zunächst vorausgesetzt werden:

1. dass der Querschnitt ein Rechteck sei. Diejenigen Seiten desselben, mit welchen die Symmetrieaxe OY parallel ist, seien $= 2b$, diejenigen, mit welchen OZ parallel ist, $= 2c$ (*Fig. 26*). Damit in allen Punkten der letztern die Richtung der resultirenden Spannung τ mit ihnen zusammen falle, muss $\tau_y = 0$ werden, falls $y = \pm b$ gesetzt wird, d. h. es muss mit Rücksicht auf den Ausdruck a) die Gleichung stattfinden:

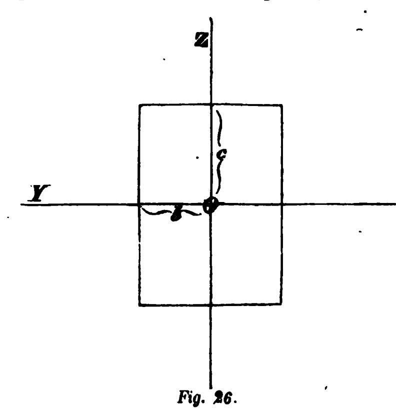


Fig. 26.

$$m \cdot z + m_1 \cdot b^2 z + m_2 \cdot z^3 = 0,$$

und zwar für jeden Werth von z, was nicht anders möglich ist, als wenn zugleich

$$\left.\begin{array}{l} m + m_1 \cdot b^2 = 0 \quad \text{und} \quad m_2 = 0 \\ \text{ist. In gleicher Weise folgen die Relationen:} \\ n + n_1 \cdot c^2 = 0 \quad \text{und} \quad n_2 = 0 \end{array}\right\} \text{h)}$$

aus der Bedingung, dass τ_z für jeden Werth von $y = 0$ werden muss, falls $z = \pm c$ gesetzt wird. — Durch die sechs Gleichungen d), g), h) sind die sechs Constanten der Ausdrücke von τ_y und τ_z bestimmt. Nimmt man zunächst aus h) die Werthe von m_1, m_2, n_1, n_2, so folgt aus a) und b):

$$\tau_y = mz\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right); \quad \tau_z = ny\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{i)},$$

und zur Bestimmung von m und n hat man wegen d) die Gleichung:

$$nC - mB - \left(\frac{n}{c^2} - \frac{m}{b^2}\right)\int y^2 z^2 \cdot dq = M \quad \ldots\ldots \quad \text{k)},$$

und wegen g):

$$-\frac{m}{b^2} - \frac{n}{c^2} = 0$$

oder

$$m \cdot \frac{4}{3} bc^3 + n \cdot \frac{4}{3} b^3 c = 0,$$

welche Gleichung, da für das Rechteck (siehe §. 7)

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{2b \cdot (2c)^3}{12} = \frac{4}{3} bc^3 \\ C &= \frac{2c \cdot (2b)^3}{12} = \frac{4}{3} b^3 c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{l)}$$

ist, verallgemeinert auch so geschrieben werden kann:

$$mB + nC = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{m)}.$$

Setzen wir andererseits voraus:

2. dass der Querschnitt eine Raute sei (*Fig.* 27). Die nach den Symmetrieaxen genommenen Dimensionen, welche aber hier die Diagonalen sind, seien wieder $= 2b$ und $2c$. Die Bedingung, dass in allen Punkten der Seite BC die Richtung der resultirenden Tangentialspannung τ mit ihr zusammen fallen muss [worin mit Rücksicht auf die Form der Ausdrücke a) und b) zugleich liegt, dass dieses auch in allen Punkten der andern drei Seiten der Fall ist], wird hier durch die Gleichung ausgedrückt:

$$-\tau_y : \tau_z = b : c \quad \text{oder} \quad c \cdot \tau_y + b \cdot \tau_z = 0,$$

welche durch alle Werthe von y und z erfüllt werden muss, die der geraden Linie BC entsprechen, also durch jedes y, falls

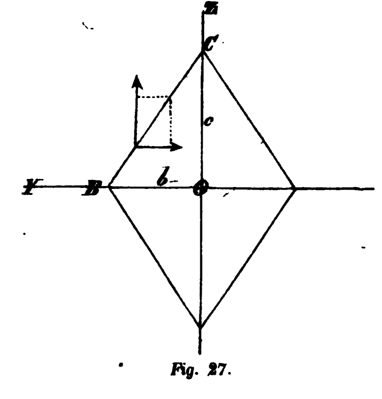


Fig. 27.

$$z = -\frac{c}{b} \cdot y + c = c\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution nimmt aber jene Gleichung die Form an:

$$mc^2\left(1 - \frac{y}{b}\right) + m_1 \cdot c^2 y^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) + m_2 \cdot c^4 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^3 + nby +$$
$$+ n_1 \cdot bc^2 y \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 + n_2 \cdot by^3 = 0 \quad ,$$

und sie kann nicht anders für jeden Werth von y stattfinden, als wenn die

Coefficienten der vereinigten Glieder mit y^0, y^1, y^2, y^3 einzeln $= 0$ sind, d. h. wenn

$$\left.\begin{aligned} m + m_2 \cdot c^2 &= 0 \\ -mc^2 - 3m_2 \cdot c^4 + nb^2 + n_1 \cdot b^2 c^2 &= 0 \\ m_1 \cdot b^2 c^2 + 3m_2 \cdot c^4 - 2n_1 \cdot b^2 c^2 &= 0 \\ m_1 \cdot b^2 c^2 - m_2 \cdot c^4 + n_1 \cdot b^2 c^2 + n_2 \cdot b^4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; \text{h}')$$

ist. Aus der ersten dieser Gleichungen, welche in Verbindung mit d) und g) gerade ausreichen, die gesuchten sechs Constanten in den Ausdrücken von τ_y und τ_z zu bestimmen, folgt:

$$m_2 = -\frac{m}{c^2},$$

dann aus der zweiten:

$$n_1 = -\frac{n}{c^2} - 2\frac{m}{b^2},$$

dann aus der dritten:

$$m_1 = -\frac{m}{b^2} - 2\frac{n}{c^2},$$

endlich aus der vierten:

$$n_2 = -\frac{n}{b^2}.$$

Vermittelst dieser Werthe von m_1, m_2, n_1, n_2 verwandeln sich zuvörderst die Ausdrücke a) und b) in:

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= mz\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - 2nz\frac{y^2}{c^2} \\ \tau_z &= ny\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - 2my\frac{z^2}{b^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{i}'),$$

und die zur Bestimmung von m und n dienenden Gleichungen d) und g) in:

$$nC - mB + \left(\frac{n}{c^2} - \frac{m}{b^2}\right)\int y^2 \cdot z^2 \cdot dq - \frac{n}{b^2}\int y^4 \cdot dq + \frac{m}{c^2}\int z^4 \cdot dq = M \; . \; . \; \text{k}')$$

und

$$-3\frac{m}{b^2} - 3\frac{n}{c^2} = 0,$$

welche letztere Gleichung, da für die Raute

$$\left.\begin{aligned} B &= 4\frac{bc^3}{12} = \frac{bc^3}{3} \\ C &= 4\frac{b^3 c}{12} = \frac{b^3 c}{3} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{l}')$$

ist, verallgemeinert auch so geschrieben werden kann:

$$mB + nC = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{m}').$$

Obschon nun die Gleichungen m) und m′) vollkommen übereinstimmen und auch, wie wir nachher sehen werden, die verallgemeinerten Gleichungen k) und k′), so sind doch die Ausdrücke i) und i′) wesentlich verschieden, so dass man zur Erzielung eines übereinstimmenden und deshalb als allgemein anzusehenden Resultates

die Glieder dritter Ordnung in den Ausdrücken a) und b) nachträglich wieder vernachlässigen, also

$$\tau_y = mz\,; \quad \tau_z = ny$$

setzen, und demgemäss auch der Gleichung d) die einfachere Form:

$$nC - mB = M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{n)}$$

geben muss, nachdem die vorübergehende Berücksichtigung jener Glieder zur Ableitung der Gleichungen m) und m') aus g) gedient haben, welche letztere identisch geworden sein und m und n unbestimmt gelassen haben würde, wenn man von vornherein $m_1 = n_1 = 0$ gesetzt hätte. Aus n) und m) folgt nun:

$$m = -\frac{M}{2B}\,; \qquad n = \frac{M}{2C},$$

also

$$\tau_y = -\frac{M}{2B}\cdot z\,; \quad \tau_z = \frac{M}{2C}\cdot y \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Die Ableitung der oben ferner referirten Gleichungen 2) bis 4), auf Grund dieser Werthe von τ_y und τ_z und der Werthe l) von B und C für den rechteckigen Querschnitt, bedarf keiner Erklärung.

Will man die Glieder dritter Ordnung vollständig berücksichtigen, also für den rechteckigen Querschnitt die Ausdrücke i) von τ_y und τ_z zum Grunde legen, so muss man m und n aus m) und der vollständigen Gleichung k) berechnen, welche letztere, da

$$\int y^2 z^2 \cdot dq = \int_{-b}^{+b} y^2\,dy \int_{-c}^{+c} z^2\,dz = \frac{4}{9}\,b^3 c^3$$

ist, mit Rücksicht auf l) verallgemeinert in:

$$nC - mB = \frac{3}{2}\,M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{n')}$$

übergeht. Man findet dann

$$m = -\frac{3}{4}\,\frac{M}{B}\,; \quad n = \frac{3}{4}\,\frac{M}{C}\,;$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= -\frac{3}{4}\,\frac{M}{B}\,z\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{9}{16}\,\frac{M}{b c^3}\,z\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \\ \tau_z &= \frac{3}{4}\,\frac{M}{C}\,y\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{9}{16}\,\frac{M}{b^3 c}\,y\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{o)}.$$

Für den rhombischen Querschnitt muss man bei Zugrundelegung der vollständigen Ausdrücke i') die Constanten m und n aus m') und der vollständigen Gleichung k') berechnen, welche letztere mit Rücksicht darauf, dass hier

$$\int y^2 z^2 \cdot dq = 4\int_0^b y^2\,dy \int_0^{c\left(1-\frac{y}{b}\right)} z^2\,dz = \frac{b^3 c^3}{45}$$

$$\int y^4 \cdot dq = 4\int_0^b y^4\,dy \int_0^{c\left(1-\frac{y}{b}\right)} dz = \frac{2}{15}\,b^5 c\,; \quad \int z^4 \cdot dq = \frac{2}{15}\,b c^5$$

ist, und wenn man sie mit Rücksicht auf die Ausdrücke l') von B und C verallgemeinert, mit der oben gefundenen Gleichung n') vollkommen identisch wird. Es ergeben sich also auch für m und n dieselben Werthe wie oben, dagegen für τ_y und τ_z die abweichenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}\tau_y &= -\frac{3}{4}\frac{M}{B}z\left(1+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\\ \tau_z &= \frac{3}{4}\frac{M}{C}y\left(1-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad o').$$

Die Bedingungsgleichung $t = \max.\sqrt{\tau_y^2+\tau_z^2}$, welche der Forderung entspricht, dass die mit der Torsion eines prismatischen Körpers verbundene specifische Tangentialspannung höchstens einem gegebenen Werthe t gleich sei, nimmt nun bei Voraussetzung eines rechteckigen Querschnitts insbesondere durch die Substitution der obigen genaueren Werthe o) von τ_y und τ_z die folgende Form an:

$$\begin{aligned} t &= \frac{9}{16}\frac{M}{bc}\cdot\max.\sqrt{\frac{z^2}{c^4}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^4}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2}\\ &= \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c}\cdot\max.\sqrt{\frac{b^2}{c^2}\frac{z^2}{c^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2} \quad \ldots \quad p), \end{aligned}$$

und es ist zu untersuchen, durch welche Werthe von y und z, die bezüglich zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$, $-c$ und $+c$ liegen, der Radicand

$$R = \frac{b^2}{c^2}\frac{z^2}{c^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2$$

am grössten wird und welches sein grösster Werth ist. Wenn aber $b < c$ vorausgesetzt wird, so ist, weil die Quotienten

$$\frac{y^2}{b^2},\quad 1-\frac{y^2}{b^2},\quad \frac{z^2}{c^2},\quad 1-\frac{z^2}{c^2}$$

sämmtlich $\gtreqless 1$ sind, jedenfalls

$$R \gtreqless \left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}$$

oder

$$R \gtreqless 1-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^4,$$

also gewiss

$$R \gtreqless 1$$

und da für $z=0$ und $y=\pm b$, d. h. in den Mittelpunkten der längern Seiten, in der That $R=1$ wird, so geht die Bedingungsgleichung p) über in:

$$t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5).$$

Wird der der Gleichung 4) entsprechende Werth von M zum Unterschied mit M' bezeichnet, so ist

$$\frac{M}{M'} = \frac{\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{c}}{\dfrac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}},$$

und wenn also das Verhältniss $b : c$ von 1 anfangend kleiner und kleiner wird, so nähert sich das Verhältniss $M : M'$ von $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ an abnehmend der Grenze $\frac{2}{3}$, so dass die Formel 5) unter allen Umständen die meiste Sicherheit darbietet.

Um ferner die Formeln 6) und 7) zur Berechnung des specifischen Torsionswinkels ϑ zu rechtfertigen, wollen wir uns den Querschnitt vorstellen, welcher sich in der Richtung OX im Abstande $OO' = dx$ vom Querschnitt YOZ befindet, und seine Hauptaxen mit $O'Y'$ und $O'Z'$ bezeichnen. Die Verdrehung des rechten Winkels $Y'O'Z'$ gegen YOZ möge für ein in der Richtung XO sehendes Auge dem Lauf eines Uhrzeigers gleich stattfinden, wie es durch die *Fig. 28*, welche die in der Richtung XO betrachtete Projection auf die Ebene YOZ sein soll, dargestellt wird. Bezeichnet dann ω_0 den Absolutwerth des unendlich kleinen Winkels der Richtungen OY und $O'Y'$, oder OZ und $O'Z'$ bei der Torsion, so ist

$$\vartheta = \frac{\omega_0}{dx} \quad \ldots\ldots \quad \text{q).}$$

Fig. 28.

Denken wir uns für einen Augenblick den Körper in seinem natürlichen unverdrehten Zustande und in den jetzt ebenen Querschnitten YZ und $Y'Z'$ zwei beliebige correspondirende Punkte A und A', d. h. solche zwei Punkte, deren Coordinaten y und z gleich sind oder deren Verbindungslinie AA' mit OX parallel ist, und von diesen Punkten aus die unendlich kleinen geraden Linien $AB = A'B' = dy$ in der Richtung OY gezogen. Diese geraden Linien denken wir materiell, nämlich als die Oerter der darin befindlichen materiellen Punkte, und alsdann den Körper in seinen Zustand der Torsion zurück versetzt. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen der zweiten Ordnung sind nun AB und $A'B'$ noch immer als gerade Linien zu betrachten, welche aber durch die Torsion sowohl gegen einander, als auch der Krümmung der Querschnitte wegen im Allgemeinen gegen die Ebene YOZ geneigt worden sind. Der auf die Ebene YOZ projicirte unendlich kleine Winkel der Richtungen AB und $A'B'$ sei mit ω bezeichnet, so ist ω als eine Function von y und z zu betrachten, welche für $y = z = 0$ den Werth ω_0 annimmt. — Nun sei ζ die kleine Zunahme, welche die Coordinate z eines beliebigen materiellen Punktes des Körpers, dessen urspüngliche Coordinaten x, y, z waren, durch die Torsion erfährt; dann ist

$$\frac{d\zeta}{dx} \cdot dx$$

die in der Richtung OZ stattfindende unendlich kleine Verrückung des Punktes, dessen ursprüngliche Coordinaten $= x + dx$, y, z waren, gegen jenen. Die Ableitung $\frac{d\zeta}{dx}$ ist, ebenso wie ζ, eine Function von x, y und z; bezeichnet man ihren Werth für $x = 0$ mit $\frac{d\zeta}{dx_0}$, so ist

$$\frac{d\zeta}{dx_0} \cdot dx$$

die Verrückung in der Richtung OZ des Punktes A' gegen den Punkt A. Das Differenzial derselben in Beziehung auf y, nämlich

$$\frac{d^2\zeta}{dx_0\,dy}\cdot dx\,dy$$

ist der Unterschied zwischen der Verrückung von B' gegen B und von A' gegen A in der Richtung OZ, welche Grösse, durch dy dividirt, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung offenbar den Winkel ω liefert. Also ist

$$\omega = \frac{d^2\zeta}{dx_0\,dy}\cdot dx \qquad \text{r)}$$

und, wenn man den Werth der Function $\frac{d^2\zeta}{dx_0\,dy}$ für $y = z = 0$ mit $\frac{d^2\zeta_0}{dx_0\,dy}$ bezeichnet:

$$\omega_0 = \frac{d^2\zeta_0}{dx_0\,dy}\cdot dx,$$

und endlich wegen q):

Ebenso ist offenbar auch

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{d^2\zeta_0}{dx_0\,dy}\\ \vartheta &= -\frac{d^2\eta_0}{dx_0\,dz}\end{aligned}\right\} \qquad \text{s)}$$

unter η die mit der Torsion verbundene kleine Znnahme der Coordinate y eines beliebigen materiellen Punktes des Körpers verstanden, indem die Nothwendigkeit des —Zeichens zur Erhaltung des Absolutwerthes ϑ bei Betrachtung der *Fig. 28* sich leicht zu erkennen giebt.

Betrachten wir nun ferner die zweite und dritte der im §. 17 angeführten allgemeinen Relationen b), nämlich:

$$p_{xz} = A_{xz}\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right); \quad p_{xy} = A_{xy}\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

In denselben bedeuten die unserer Voraussetzung 1) zufolge gleichen Constanten A_{xz} und A_{xy} den im §. 17 mit G_x, hier einfach mit G bezeichneten Modulus der Schubelasticität; ξ, η, ζ die kleinen Zunahmen der Coordinaten x, y, z eines beliebigen materiellen Punktes des Körpers im verschobenen Gleichgewichtszustande, von welchen die erste, ξ, unserer dritten Annahme gemäss von x unabhängig ist, also auch die im Vorhergehenden darunter verstandene Entfernung des beliebigen materiellen Punktes A des Querschnitts YZ von der Ebene YZ bezeichnen kann; p_{xz} und p_{xy} endlich gehen für $x = 0$ in die Spannungscomponenten τ_z und τ_y dieses Punktes A über. Setzt man also in obigen Gleichungen $x = 0$, so erhält man mit Rücksicht auf die Näherungswerthe 1) von τ_y und τ_z:

$$\left.\begin{aligned}\tau_z &= \frac{M}{2C}\cdot y = G\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx_0}\right)\\ \tau_y &= -\frac{M}{2B}\cdot z = G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx_0}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \text{t)}$$

oder, wenn man die erste dieser Gleichungen in Beziehung auf y, die zweite in Beziehung auf z ableitet, alsdann $y = z = 0$ setzt, und die Ausdrücke s) beachtet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{2C} &= G\left(\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz} + \mathfrak{I}\right) \\ -\frac{M}{2B} &= G\left(\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz} - \mathfrak{I}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad u)$$

woraus durch Subtraction

$$\frac{M}{2}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B}\right) = 2G\mathfrak{I}\ ,$$

mithin

$$\mathfrak{I} = \frac{M}{4G}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B}\right) = \frac{M}{G\dfrac{4BC}{B+C}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

erhalten wird.

Nimmt man für τ_y und τ_z in den Gleichungen t) anstatt der allgemeinen Näherungswerthe 1) einmal die für das Rechteck insbesondere gefundenen Ausdrücke o), dann die für den rhombischen Querschnitt gültigen Ausdrücke o′), so ist in beiden Fällen für $y = z = 0$:

$$\frac{d\tau_z}{dy} = \frac{\frac{3}{2}M}{2C}\,; \quad \frac{d\tau_y}{dz} = -\frac{\frac{3}{2}M}{2B}\,,$$

so dass man zur Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung von τ_y und τ_z nur nöthig hat, in den Gleichungen u), und somit in dem Ausdrucke 6) von $\mathfrak{I}$, das Moment M des resultirenden Kräftepaars mit $\frac{3}{2}$ zu multipliciren.

Wenn man die Function ξ als eine nach wachsenden ganzen Potenzen von y und z fortschreitende Reihe entwickelt denkt, und von derselben, um die angenäherte Gleichung des gekrümmten Querschnitts in der Nähe seines Mittelpunktes O zu erhalten, nur die ersten Glieder bis zu denjenigen von der zweiten Ordnung berücksichtigt, so ist bereits bemerkt worden, dass man dann einfach

$$\xi = e \cdot yz$$

setzen dürfe, woraus

$$\frac{d^2\xi}{dy\,dz} = e, \quad \text{also auch} \quad \frac{d^2\xi_0}{dy\,dz} = e\ .$$

und dann aus jeder der Gleichungen u)

$$e = \frac{B-C}{B+C} \cdot \mathfrak{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

sich ergiebt.

Der zu Eingang dieses Kapitels im §. 1 ausgesprochenen Grundregel gemäss muss der Constanten t in den Formeln 3) bis 5) dieses Paragraphen ein Werth beigelegt werden, der kleiner ist, als das bezügliche Maass τ' der vollkommenen Schubelasticität. Letzteres ist nach §. 17 3) aus theoretischen Gründen unter gewissen Voraussetzungen für isotrope Körper $= \frac{4}{5}$ vom Maasse σ' der vollkommenen absoluten Elasticität; also z. B.

für Schmiedeeisen: $\tau' = \frac{4}{5} \cdot 1300 = 1040$

für Gusseisen: $\tau' = \frac{4}{5} \cdot 1000 = 800$

mit Rücksicht auf die im §. 3 angegebenen abgerundeten Mittelwerthe von σ' und mit Rücksicht darauf, dass die Metalle hier als isotrop gelten dürfen. Die praktischen Erfahrungen lehren in der That, dass man angemessene Resultate erhält, wenn man bei einer ruhigen, stetigen Wirkungsweise des die Torsion verursachenden Momentes M die Constante t bei schmiede- und gusseisernen Wellen $= \frac{3}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ dieser theoretischen Werthe von τ' annimmt. Bei hölzernen Wellen ist es erfahrungsmässig angemessen, $t = 80$ bis 60 (Kilogramm pro Quadratcentimeter) zu setzen. Bei solchen Wellen jedoch, welche Erschütterungen ausgesetzt sind, muss man diese Zahlen nach Umständen mehr oder weniger, zuweilen sehr bedeutend vermindern.

Was die Grösse G in den Formeln 6) bis 8) betrifft, so ist dieselbe nach §. 17 1) für Metalle $= \frac{2}{5} E$ zu setzen, unter E den betreffenden Modulus der absoluten Elasticität (§. 2) verstanden. In der That findet man durch diese Substitution und bei Zugrundelegung der Formel 8) eine genügende Uebereinstimmung mit den Resultaten der von Duleau, Savart, Bevan und Gerstner mit Stäben von Eisen und Stahl angestellten Versuchen, wenn man nur dem Correctionsfactor α einen zwischen den Grenzen 1 und 1,5 veränderlichen Werth beilegt, wie es unserer Analyse gleichfalls vollkommen entspricht. Berechnet man den Werth von α vermittelst der Formel:

$$\alpha = \frac{2}{5} E \cdot \frac{4BC}{B+C} \cdot \frac{\vartheta}{M},$$

so findet man ihn bei einem kreisförmigen Querschnitte zwischen den Grenzen 1,1 und 1,2, bei einem quadratischen zwischen 1,2 und 1,4 schwankend. Bei einem länglichen, z. B. länglich rechteckigen, Querschnitte scheint er bis 1,5 genommen werden zu müssen; indessen sind die Versuche in dieser Beziehung weniger zahlreich und zuverlässig.

Für Hölzer kann die Grösse G nur aus den Versuchen selbst entnommen werden. Berechnet man sie vermittelst der Formel:

$$G = \frac{\alpha M}{\vartheta \frac{4BC}{B+C}}$$

auf Grund der von Benj. Bevan mit hölzernen Stäben von quadratischem Querschnitt angestellten Torsionsversuche, so findet man für $\alpha = 1,25$ die folgenden Mittelwerthe:

Eichenholz:	$G = 8300$
Rothbuchenholz:	$G = 11200$
Weissbuchenholz:	$G = 13900$
Kiefernholz:	$G = 6900$.

Zu den Versuchen über die Torsion mit grössern Stücken kann man mit Vortheil eine gewöhnliche Drehbank benutzen, wie es z. B. von Gerstner bei seinen 1831 im technischen Institut zu Prag mit Holz- und Eisenstäben angestellten Versuchen geschehen ist. Der prismatische Stab wurde einerseits an der einen Docke befestigt, an dem andern Ende mit einer Scheibe versehen, an welche vermittelst einer daran befestigten umgelegten Schnur Gewichte gehängt werden konnten. An der andern Docke war ein eiserner Zapfen befestigt, der in ein im Mittelpunkte der Scheibe, also in der Axe des Stabes, angebrachtes Loch hineinragte, so dass sich die Scheibe und mit ihr der Stab mit möglichst wenig Reibung um den Zapfen drehen konnte, welcher zugleich die an die Axe übertragene Belastung unmittelbar aufnahm, so dass dieselbe keine Biegung, sondern nur vermöge des aus ihrer Uebertragung hervorgehenden Kräftepaares eine Verdrehung des Stabes verursachen konnte. An der Scheibe befand sich ein Zeiger, welcher über einem auf der benachbarten Docke befestigten getheilten Bogen, von 18 Zoll Halbmesser in der Theilung, spielte.

1829. Savart *Ann. de ch. et de ph.* — Bevan *Phil. Trans.*
1831. Gerstner Handb. d. Mech. I. p. 377*.

1833. Navier *Rés. des leç. sur l'appl. de la méc.* I. Deutsch von Westphal u. d. T. „Mech. d. Baukunst". 1851. p. 81 u. ff.* (Theorie u. Vers. von Duleau u. Savart.)
1842. Salzenberg Vortr. über Masch. Bau. p. 42*. (Vers. von Bevan.)
1848. *Poncelet Anw. d. Mech. auf Masch. Deutsch von Schnuse. II. p. 211 u. ff.* (Theorie.)
1854. Wiebe Einf. Masch. Theile. I. p. 233*. (Theorie u. prakt. Erf. Coeffic.)

VII. Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

§. 22. Zusammengesetzte Festigkeit eines isotropen Körpers im Allgemeinen.

Indem wir zum Schlusse dieses Kapitels den Widerstand eines Körpers gegen eine beliebige Belastung in der grössten für die praktischen Anwendungen erforderlichen Allgemeinheit zu untersuchen uns vorsetzen, wollen wir einen solchen Körper seiner Form nach dadurch erzeugt denken, dass eine nach einem gewissen Gesetze stetig veränderliche (oder auch unveränderliche) ebene Fläche längs einer gewissen Linie, die gerade oder krumm, von einfacher oder doppelter Krümmung sein kann, sich so bewegt, dass sie beständig in ihrem Schwerpunkte und senkrecht von jener Linie geschnitten wird. Diese gedachte Leitlinie nennen wir die Mittellinie, und jeden auf derselben senkrechten Durchschnitt einen Querschnitt des Körpers. Hinsichtlich seiner materiellen Beschaffenheit setzen wir denselben einstweilen als isotrop voraus, und bezeichnen seinen Elasticitätsmodulus wie früher mit E, die Grösse $\frac{2}{5}E$ oder den Modulus der Schubelasticität insbesondere (§. 17) mit G. Durch die Voraussetzung der Isotropie, welche bei den aus Metall verfertigten Constructionstheilen mit hinlänglicher Zuverlässigkeit immer zum Grunde gelegt werden darf, wird die mathematische Behandlung wesentlich vereinfacht; auch sind es hauptsächlich die in den mannigfachsten Formen herzustellenden Eisenconstructionen, zu deren Berechnung hinsichtlich ihrer Widerstandsfähigkeit die in diesem und dem folgenden Paragraphen mitgetheilten Formeln nöthig sind.

Wir beschäftigen uns hier nicht mit der schwierigern und für die Praxis weniger wichtigen Untersuchung der Formveränderung, welche ein Körper in Folge einer beliebigen Belastung erleidet, auf die wir im Vorigen bei den besondern einfachen Belastungsarten und bei der Voraussetzung einer prismatischen Form zugleich Rücksicht genommen haben; vielmehr handelt es sich hier einzig und allein um die Bedingungsgleichung für die Erfüllung der Forderung, dass in keinem Punkte des Körpers, dessen nicht näher untersuchte Formänderung nur als sehr klein vorausgesetzt wird, die in irgend einer Richtung stattfindende specifische positive oder negative Ausdehnung einen gewissen als höchstens zulässig gegebenen Werth überschreitet, welchen letztern wir für positive und negative Ausdehnung (Verkürzung) der Einfachheit wegen im Allgemeinen als gleich voraussetzen. Es ist nämlich der einleitenden Bemerkung im §. 1 zufolge bei allen Constructionen die Forderung massgebend, dass durch die Belastung keines Stückes in irgend einem Punkte die Grenze der vollkommenen Elasticität überschritten werde. Bisher haben wir dieser Forderung dadurch genügen können,

dass wir für die specifische Normal- und Tangentialspannung gewisse von dem Material abhängige erfahrungsmässige Grenzwerthe annahmen. Weil aber nach §. 17 die specifische Ausdehnung in einer gewissen Richtung nicht nur von der Normalspannung in dieser Richtung, sondern auch von denjenigen, welche in den darauf senkrechten Richtungen stattfinden, abhängig ist, so dass man, um bei einem isotropen Körper insbesondere die in einem Punkte A in einer gewissen Richtung AB hervorgerufene Ausdehnung zu erhalten, von der Spannung im Punkte A und in der Richtung AB zunächst den vierten Theil der Summe der in diesem Punkte in zwei unter sich und zu AB senkrechten Richtungen stattfindenden Spannungen subtrahiren, und alsdann die erhaltene Differenz durch den Elasticitätsmodulus E dividiren muss [§. 17 m)]; weil man ferner offenbar annehmen muss, dass die Ueberschreitung der Grenze der vollkommenen absoluten Elasticität nicht sowohl von der Spannung, als vielmehr von der Ausdehnung abhängt (§. 1); und weil endlich, wie bereits im §. 17 angedeutet ist und im Folgenden weiter ausgeführt werden wird, etwaige Verschiebungen stets auf gewisse Ausdehnungen sich zurückführen und mit den schon vorhandenen sich zusammensetzen lassen: so müssen in der That im Allgemeinen die Dimensionen des Körpers oder seine zulässige Belastung von den specifischen Ausdehnungen abhängig gemacht werden, welche durch die letztere in den verschiedenen Punkten des Körpers in den verschiedenen Richtungen hervorgerufen werden.

Indem bei der absoluten und einfachen rückwirkenden Festigkeit im ersten und zweiten Abschnitte dieses Kapitels die Spannung der Ausdehnung proportional gesetzt wurde, so dass es einerlei war, ob man die eine oder die andere als massgebend für die zulässige Belastung zum Grunde legte, so wurde dabei nur der in der That nicht in Betracht kommende Druck des umgebenden Mittels (der Luft) vernachlässigt. Ebenso im dritten Abschnitte bei der relativen Festigkeit in den Fällen, wo die Belastungen in einzelnen Punkten angreifend vorausgesetzt wurden, während aber die Vernachlässigung der Seitenpressungen der Längenfasern schon von grösserem Einflusse wird, wenn die Belastung des Balkens auf diesem ausgebreitet ist und dadurch zunächst an dem diese Belastung unmittelbar aufnehmenden Theile der Oberfläche eine mit ihr im Gleichgewicht befindliche, unter Umständen beträchtliche Seitenspannung hervorruft. Bei der Torsionsfestigkeit im sechsten Abschnitt endlich konnten die Tangentialspannungen oder die ihnen proportionalen Verschiebungen in den Punkten der Querschnitte als massgebend zum Grunde gelegt werden, ohne sie zuvor auf gewisse Ausdehnungen zurückzuführen, weil diese Reduction durch die im §. 17 hergeleiteten Relationen 1) bis 3) in der That bereits ausgeführt waren und es nicht erforderlich war, sie mit noch andern Ausdehnungen zusammen zu setzen.

Wenn oben gesagt worden ist, dass wir die zusammengesetzte Festigkeit hier nur in der für die praktischen Anwendungen erforderlichen Allgemeinheit untersuchen wollen, so bezieht sich dieser Vorbehalt hauptsächlich auf die Annahme, dass von den in dem Körper hervorgerufenen Verschiebungen diejenigen der Querschnitte so vorwalten, dass sie allein in Betracht gezogen zu werden brauchen, eine Annahme, die vermöge der besondern

Form und Belastungsweise des Körpers der Wirklichkeit in der That hinlänglich gemäss zu sein pflegt. Durch diese Verschiebungen werden zwar diejenigen von Ebenen, die auf einem Querschnitte senkrecht, also mit der bezüglichen Tangente der Mittellinie parallel sind, in der Richtung dieser Tangente nothwendig mitbedingt; es könnten aber solche Ebenen im Allgemeinen auch eine zur Mittellinie senkrechte Verschiebung erfahren, und diese ist es, von welcher wir abstrahiren. Denken wir also im natürlichen Zustande des Körpers in demselben irgend ein unendlich kleines rechtwinkeliges materielles Parallelipipedum abgegrenzt, dessen eine Seitenfläche in einem Querschnitt liegt, so besteht unsere Annahme darin, dass durch die mit der Belastung des Körpers verbundene Formänderung desselben jenes Parallelipipedum zwar in der Richtung jeder Kante eine Ausdehung, dagegen nur eine solche Verschiebung erfahren könne, bei welcher die mit jener Seitenfläche parallelen Durchschnitte nicht aufhören, Rechtecke zu sein. — Wenn ferner gesagt worden ist, dass wir uns nicht mit der Untersuchung der Formänderung des Körpers im Ganzen, sondern nur mit den seine Widerstandsfähigkeit bedingenden Ausdehnungen und Verschiebungen in seinen einzelnen Punkten befassen, so müssen wir dabei voraussetzen, dass die Unterstützungen des Körpers nicht mannigfaltiger seien, als sie zu seinem Gleichgewicht als festes System erforderlich sind, weil sonst die diese Unterstützungen ersetzenden Kräfte, deren Kenntniss nothwendig ist, nicht ohne Berücksichtigung der Elasticität und Verbiegung bestimmbar sein würden. Wäre z. B. der Körper an einem Ende befestigt, so dürfte, da sein Gleichgewicht als festes System hierdurch gesichert ist, keine anderweitige Unterstützung ausserdem vorhanden sein, oder man müsste sich mit einer schätzungsweisen Bestimmung der dieselbe ersetzenden Kraft begnügen.

Es sei nun

q der Inhalt eines beliebigen Querschnitts;

y, z seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes A desselben in Bezug auf seine Hauptaxen OY und OZ für den Schwerpunkt O; die auf OY und OZ senkrechte Axe OX fällt in die Tangente der Mittellinie.

$B = \int z^2 \cdot dq$ und $C = \int y^2 \cdot dq$ seien die Trägheitsmomente des Querschnitts in Bezug auf die Hauptaxen OY und OZ. Ferner seien

P_x, P_y, P_z die Summen der nach den Axen OX, OY, OZ genommenen äusseren Kräfte, welche an demjenigen Theile des durch den gedachten Querschnitt getheilten Körpers angreifen, nach welchem die Richtung OX hinweist, wobei die auf dieser Seite etwa vorhandenen Unterstützungen durch äquivalente Kräfte ersetzt gedacht und diese mit zu den äusseren Kräften gerechnet werden müssen;

M_x, M_y, M_z seien die Momentensummen derselben Kräfte in Bezug auf die Axen OX, OY, OZ.

Die Grössen P und M sind positiv oder negativ, und zwar ist eine solche partielle resultirende Kraft wie P_x positiv, wenn sie die Richtung OX, negativ, wenn sie die entgegengesetzte Richtung hat; ein solches partielles resultirendes Moment wie M_x ist positiv, wenn es für einen Beobachter, der in der Richtung XO auf die Ebene YOZ der beiden andern Axen hinsieht, dem Lauf eines Uhrzeigers

gleich zu drehen strebt, negativ bei der entgegengesetzten Drehung. — Es seien ferner:

σ_x, σ_y, σ_z die im Punkte A in den Richtungen der Axen stattfindenden specifischen Normalspannungen, welche, je nachdem sie positiv oder negativ sind, absolute oder rückwirkende, d. h. solche Spannungen bedeuten, die für sich allein (ohne Seitenspannungen) mit positiven (eigentlichen) Ausdehnungen, oder solche, die für sich allein mit negativen Ausdehnungen (Verkürzungen) verbunden sein würden;

λ_x, λ_y, λ_z die entsprechenden positiven oder negativen Ausdehnungen;

τ_y, τ_z die in den Richtungen OY, OZ stattfindenden specifischen Tangentialspannungen des Querschnitts im Punkte A;

γ_y, γ_z die entsprechenden Verschiebungen.

Die in den Elementen $= dq$ des beliebigen Querschnitts $= q$ wirksamen Spannungen $\sigma_x \cdot dq$, $\tau_y \cdot dq$ und $\tau_z \cdot dq$ sind der Bedingung unterworfen, dass sie an dem in diesem Querschnitt abgeschnitten gedachten Körpertheile mit den äussern Kräften im Gleichgewichte sein müssen, wenn sie selbst in dem erforderlichen Sinne wirkend als äussere Kräfte gedacht werden. Aus den Bedingungsgleichungen für das Stattfinden dieses Gleichgewichts ergeben sich, falls die Grössen σ und τ als lineare Functionen von y und z angenommen werden, mit Rücksicht auf die Relation m) des §. 17 und auf die Definition des Modulus G der Schubelasticität die folgenden Gleichungen:

$$\lambda_x = \frac{1}{E}\left(\frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C} \cdot y + \frac{M_y}{B} \cdot z - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}\right) \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{G}\left(\frac{P_y}{q} - \frac{M_x}{2B} \cdot z\right); \quad \gamma_z = \frac{1}{G}\left(\frac{P_z}{q} + \frac{M_x}{2C} \cdot y\right) \quad \ldots \quad 2)$$

und aus der angeführten Relation m) §. 17 ausserdem:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_y &= \frac{5}{16E}(3\sigma_y - \sigma_z) - \frac{\lambda_x}{4} \\ \lambda_z &= \frac{5}{16E}(3\sigma_z - \sigma_y) - \frac{\lambda_x}{4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Die in den Ausdrücken von λ_x, λ_y, λ_z vorkommenden Normalspannungen σ_y und σ_z müssen in jedem einzelnen Falle besonders ermittelt werden; in den meisten Fällen werden sie vernachlässigt werden dürfen.

Durch Zusammensetzung der Dehnungen λ_x, λ_y, λ_z und Verschiebungen γ_y, γ_z findet man die resultirende specifische Ausdehnung λ im Punkte A in einer beliebigen Richtung, die bestimmt ist durch den spitzen Winkel φ, den sie mit OX, und den von 0 bis 360° zu rechnenden Winkel ψ, den ihre Projection auf die Ebene des Querschnitts mit der Axe OY bildet:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_x \cdot \cos^2\varphi + A \cdot \sin^2\varphi + V \cdot \sin\varphi \cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}[\lambda_x + A + (\lambda_x - A)\cos 2\varphi + V \cdot \sin 2\varphi] \quad \ldots \quad 4), \end{aligned}$$

wo

$$A = \lambda_y \cdot \cos^2\psi + \lambda_z \cdot \sin^2\psi; \quad V = \gamma_y \cdot \cos\psi + \gamma_z \cdot \sin\psi$$

ist; und diejenigen Winkel φ und ψ, welche der Richtung entsprechen, in welcher im Punkte A die specifische Ausdehnung oder Verkürzung am grössten ist, sind bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\gamma_y \cdot \sin\psi - \gamma_z \cdot \cos\psi}{2(-\lambda_y + \lambda_z)\sin\psi\cos\psi} \\ \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{V}{\lambda_x - A} &= \frac{\gamma_y \cdot \cos\psi + \gamma_z \cdot \sin\psi}{\lambda_x - \lambda_y \cdot \cos^2\psi - \lambda_z \cdot \sin^2\psi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 5).$$

Wird endlich der diesen Winkeln φ und ψ entsprechende grösste absolute Werth des Ausdrucks 4) von λ mit λ', und die mit der erforderlichen Sicherheit höchstens zulässige specifische Ausdehnung mit $\frac{k}{E}$ bezeichnet, wo also k die bei fehlender Seitenspannung höchstens zulässige specifische Normalspannung bedeutet, so ist die zu erfüllende Bedingung:

$$\max. \lambda' = \frac{k}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6).$$

Das Maximum von λ' ist hierbei mit Rücksicht darauf zu ermitteln, dass diese Grösse sowohl als Function von y und z von einem zum andern Punkte des betrachteten Querschnitts, als auch im Allgemeinen, als Function von q, B, C, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, σ_y, σ_z, von einem zum andern Querschnitte sich ändert. Die Darstellung von λ' als Function aller jener Grössen ist jedoch nicht allgemein ausführbar, da die Gleichungen 5) nicht allgemein in Bezug auf φ und ψ aufgelöst werden können. Um so weniger kann der Ausdruck von max. λ' allgemein angegeben werden.

Behufs der Herleitung der vorstehend referirten Gleichungen wollen wir zunächst bemerken, dass, wenn wir die Spannungen, welche in den Elementen des durch den beliebigen Punkt O der Mittellinie des Körpers gehenden Querschnitts stattfinden, mit $\sigma_x \cdot dq$, $\tau_y \cdot dq$ und $\tau_z \cdot dq$ bezeichnen, wir diese Spannungen in einem solchen Sinne wirkend voraussetzen, dass sie zusammen genommen dem System der äussern Kräfte und Kräftepaare P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z äquivalent sind, so dass wir also dieselben Spannungen, in dem entgegengesetzten oder demjenigen Sinne wirkend gedacht, in welchem sie in ihrer Gesammtheit jenen äussern Kräften und Kräftepaaren Gleichgewicht halten würden, mit $-\sigma_x \cdot dq$, $-\tau_y \cdot dq$ und $-\tau_z \cdot dq$ bezeichnen müssten. Der angenommenen Richtung der Axe OX zufolge entspricht dann auch ein positiver Werth von σ_x einer absoluten, ein negativer einer rückwirkenden Spannung in dem betreffenden Punkte, und die bekannten sechs Gleichgewichtsbedingungen eines freien und festen Systems liefern die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_x = \int \sigma_x \cdot dq; \quad P_y = \int \tau_y \cdot dq; \quad P_z = \int \tau_z \cdot dq \\ M_x = \int (\tau_z \cdot dq \cdot y - \tau_y \cdot dq \cdot z); \; M_y = \int \sigma_x \cdot dq \cdot z; \; M_z = \int (-\sigma_x \cdot dq \cdot y) \end{aligned}\right\} \text{a).}$$

Setzen wir nun

$$\sigma_x = a + by + cz,$$

so sind die Constanten a, b, c durch die erste, fünfte und sechste der Gleichungen a)

bestimmt. Mit Rücksicht darauf, dass der Anfangspunkt O der Coordinaten der Schwerpunkt des Querschnitts und deshalb

$$\int y \cdot dq = \int z \cdot dq = o,$$

und dass ferner die Axen OY und OZ die Hauptaxen für den Punkt O sind, folglich auch

$$\int yz \cdot dq = o$$

ist, findet man nämlich aus der ersten Gleichung:

$$a = \frac{P_x}{q},$$

aus der sechsten:

$$b = -\frac{M_z}{C},$$

aus der fünften:

$$c = \frac{M_y}{B};$$

mithin

$$\sigma_x = \frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C} \cdot y + \frac{M_y}{B} \cdot z.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks für σ_x in der Relation

$$\lambda_x = \frac{\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{b)}$$

aus §. 17 erhält man den Ausdruck 1).

Wenn wir ferner auch die specifischen Tangentialspannungen τ_y und τ_z linearen Functionen von y und z gleich setzen, deren jede im Allgemeinen aus drei Gliedern bestehen kann, wie oben σ_x, so sind nur die beiden constanten Glieder durch die zweite und dritte der Gleichungen a) bestimmt und werden respective

$$= \frac{P_y}{q} \quad \text{und} \quad = \frac{P_z}{q}$$

gefunden, während die vier constanten Coefficienten der übrigen Glieder, indem sie blos der noch übrigen vierten Gleichung a) zu genügen brauchen, unbestimmt bleiben. Da aber dieser Gleichung zufolge die gedachten Coefficienten nur von M_x abhängen, so können wir uns hier die Analyse des vorigen Paragraphen zu Nutze machen, durch welche für die Spannungen τ_y und τ_z, sofern sie von dem dort einfach mit M bezeichneten auf Torsion wirkenden Momente M_x allein herrühren, die Ausdrücke

$$\tau_y = -\frac{M}{2B} \cdot z; \quad \tau_z = \frac{M}{2C} \cdot y \quad (\text{§. 21 } 1))$$

gefunden worden sind, so dass wir also im vorliegenden allgemeineren Falle

$$\tau_y = \frac{P_y}{q} - \frac{M_x}{2B} \cdot z; \quad \tau_z = \frac{P_z}{q} + \frac{M_x}{2C} \cdot y$$

setzen dürfen, woraus der Definition der Constanten G:

$$G = \frac{\tau_y}{\gamma_y} = \frac{\tau_z}{\gamma_z}$$

zufolge sofort die Ausdrücke 2) erhalten werden.

Die Ausdrücke 3) von λ_y und λ_z betreffend, ist nach Analogie mit Gleichung b):

$$\lambda_y = \frac{1}{4E}(4\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)$$
$$= \frac{1}{4E}\left[4\sigma_y - \left(E \cdot \lambda_x + \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}\right) - \sigma_z\right]$$
$$= \frac{1}{4E}\left(\frac{15}{4}\sigma_y - \frac{5}{4}\sigma_z\right) - \frac{\lambda_x}{4} = \frac{5}{16E}(3\sigma_y - \sigma_z) - \frac{\lambda_x}{4},$$

woraus λ_z durch Vertauschung von σ_y mit σ_z erhalten wird.

Denken wir uns nun im unbelasteten Zustande des Körpers durch den beliebigen materiellen Punkt A des im Punkte O auf der Mittellinie senkrechten Querschnitts die Geraden AX', AY', AZ' (*Fig. 29*) parallel und gleich gerichtet mit den Axen OX, OY, OZ. Von dem Punkte A gehe eine Richtung AB aus, welche dadurch bestimmt ist, dass sie mit AX' den spitzen Winkel φ, und dass ihre Projection AB' auf die Ebene $Y'AZ'$ mit AY' den Winkel ψ bildet, welcher stets in derselben Richtung von AY' durch den rechten Winkel hindurch gegen AZ' hin gerechnet wird, sodass er bis 360° betragen kann. Stellen wir uns die Aufgabe, diejenige specifische Ausdehnung λ zu bestimmen, welche im Punkte A in der Richtung AB stattfindet, vermöge der einzelnen specifischen Ausdehnungen λ_x, λ_y, λ_z und specifischen Verschiebungen γ_y und γ_z in den Richtungen der Axen.

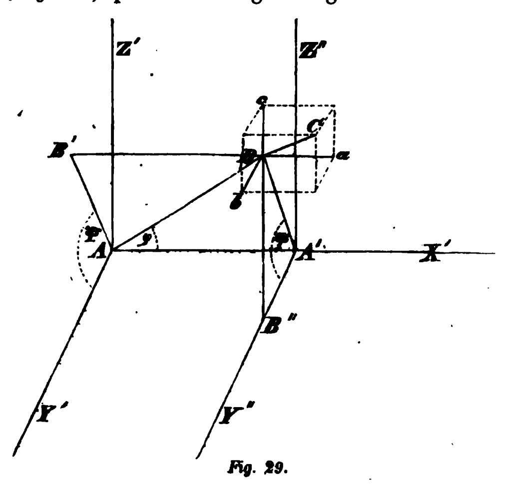


Fig. 29.

Zu dem Ende werde durch den Punkt A', der sich in AX' in dem unendlich kleinen Abstande $AA' = dx$ vom Punkte A befindet, eine Ebene gelegt, welche auf AX' senkrecht ist, und welche also die Ebenen $X'AY'$ und $X'AZ'$ in geraden Linien $A'Y''$ und $A'Z''$ schneidet, die respective mit AY' und AZ' parallel sind. Diese Ebene $Y''A'Z''$ werde von der Richtung AB im Punkte B geschnitten. Indem wir den Durchschnittspunkt B ebenso wie A als einen materiellen Punkt betrachten, stelle die gerade Linie Ba die relative Verrückung vor, welche derselbe gegen den Punkt A nach der Richtung AX' infolge der specifischen Ausdehnung λ_x erfährt, Bb diejenige, welche er nach der Richtung AY' vermöge der specifischen Ausdehnung λ_y und Verschiebung γ_y, Bc endlich diejenige, welche er nach der Richtung AZ' vermöge der specifischen Ausdehnung λ_z und Verschiebung γ_z erleidet. Diese Längen Ba, Bb, Bc sind, verglichen mit AA', sehr klein, und zwar ist, wenn BB'' parallel mit $A'Z''$ gezogen wird:

$$\left.\begin{aligned}
Ba &= \lambda_x \cdot dx \\
Bb &= \lambda_y \cdot A'B'' + \gamma_y \cdot dx = \lambda_y \cdot BA' \cdot \cos\psi + \gamma_y \cdot dx \\
&= (\lambda_y \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\psi + \gamma_y) \cdot dx \\
Bc &= \lambda_z \cdot BB'' + \gamma_z \cdot dx = \lambda_z \cdot BA' \cdot \sin\psi + \gamma_z \cdot dx \\
&= (\lambda_z \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\psi + \gamma_z) \cdot dx
\end{aligned}\right\} \ldots \text{c)}.$$

Wenn die Functionen $\cos\psi$ und $\sin\psi$ ihre Vorzeichen ändern, so thun es hiernach auch die von den Ausdehnungen λ_y und λ_z herrührenden Theile der Verrückungen Bb und Bc, wie es offenbar sein muss; es mag z. B. λ_y positiv oder negativ sein, einer Ausdehnung oder Verkürzung entsprechend, so werden die auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $X'AZ'$ befindlichen materiellen Punkte immer in entgegengesetztem Sinne parallel mit AY' verrückt.

Stellt man sich jetzt das rechtwinkelige Parallelipipedum vor, dessen Kanten Ba, Bb, Bc sind, und dessen dem Punkte B gegenüberliegender Eckpunkt mit C bezeichnet sein mag, so ist die Diagonale BC der Richtung und Grösse nach die resultirende relative Verrückung des Punktes B gegen den Punkt A; also die gesuchte specifische Ausdehnung in der Richtung AB:

$$\lambda = \frac{AC - AB}{AB}.$$

Denkt man sich ferner BC auf die Richtung AB projicirt, und bezeichnet die Projection mit BD, so kann in dem sehr spitzen rechtwinkeligen Dreieck ADC die Kathete $AD =$ der Hypotenuse AC, folglich $AC - AB = BD$ gesetzt werden, falls BD positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Punkt D über B hinaus oder zwischen A und B liegt. Hiernach ist auch:

$$\lambda = \frac{BD}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d).$$

Nun ist aber die Projection BD der Diagonale BC auf die Richtung AB, welche mit Rücksicht auf Grösse und Vorzeichen dem Product aus der absoluten Länge BC und dem Cosinus des Winkels gleich ist, den die Richtungen BC und AB mit einander bilden, bekanntlich auch gleich entweder der Summe der Producte aus den absoluten Längen Ba, Bb, Bc und den Cosinussen der Winkel zwischen den Richtungen dieser Verrückungen und der Richtung AB, oder, wie es hier genommen werden soll, der Summe der Producte aus den algebraischen Werthen der Verrückungen Ba, Bb, Bc und den Cosinussen der Winkel zwischen den Richtungen AX', AY', AZ' der Axen und der Richtung AB; mithin

$$BD = Ba \cdot \cos\varphi + Bb \cdot \cos BAY' + Bc \cdot \cos BAZ' \quad \ldots \quad e).$$

Bezeichnet man den spitzen oder stumpfen Winkel $B'AY'$, den die Richtung AB', nämlich die Projection der Richtung AB auf die Ebene $Y'AZ'$, mit der Richtung AY' bildet, mit μ (welcher Winkel mit dem auf eine andere Weise gemessenen Winkel ψ nicht verwechselt werden darf), ferner den spitzen oder stumpfen Winkel $B'AZ'$ mit ν, und beachtet, dass das körperliche Dreieck, dessen Kanten AY', AB, AB' sind, an letzterer Kante einen rechten Winkel hat, so hat man bekanntlich:

$$\cos BAY' = \cos BAB' \cdot \cos\mu = \sin\varphi \cdot \cos\mu,$$

und ebenso folgt aus der Betrachtung des an der Kante AB' rechtwinkeligen körperlichen Dreiecks, dessen beide andere Kanten AB und AZ' sind:

$$\cos BAZ' = \sin\varphi \cdot \cos\nu.$$

Da nun immer

$$\cos\mu = \cos\psi, \quad \cos\nu = \sin\psi$$

ist, wovon man sich durch Betrachtung der Richtung AB' in den vier verschiedenen Quadranten, welche von den über A hinaus verlängerten Geraden AY' und AZ' gebildet werden, leicht überzeugen kann, so ist auch:

$$\cos BAY' = \sin\varphi \cdot \cos\psi, \quad \cos BAZ' = \sin\varphi \cdot \sin\psi,$$

wodurch der Ausdruck e) sich verwandelt in:

$$BD = Ba \cdot \cos\varphi + Bb \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + Bc \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi,$$

oder mit Rücksicht auf die Ausdrücke c) in:

$$\begin{aligned} BD &= [\lambda_x \cdot \cos\varphi + (\lambda_y \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\psi + \gamma_y)\sin\varphi \cdot \cos\psi + \\ &\quad + (\lambda_z \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\psi + \gamma_z)\sin\varphi \cdot \sin\psi]\,dx \\ &= [\lambda_x \cdot \cos\varphi + (\lambda_y \cdot \cos^2\psi + \lambda_z \cdot \sin^2\psi)\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \\ &\quad + (\gamma_y \cdot \cos\psi + \gamma_z \cdot \sin\psi)\sin\varphi]\,dx, \end{aligned}$$

und weil endlich auch

$$AB = \frac{dx}{\cos\varphi}$$

ist, so erhält nach Gleichung d) die specifische Ausdehnung λ in der Richtung AB den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_x \cdot \cos^2\varphi + (\lambda_y \cdot \cos^2\psi + \lambda_z \cdot \sin^2\psi)\sin^2\varphi + \\ &\quad + (\gamma_y \cdot \cos\psi + \gamma_z \cdot \sin\psi)\sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ &= \lambda_x \cdot \cos^2\varphi + A \cdot \sin^2\varphi + V \cdot \sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

Er stimmt mit dem ersten der oben referirten Ausdrücke 4) überein, und lässt sich leicht in die andere Form verwandeln, nämlich

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_x \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + A\,\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + V\frac{\sin 2\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2}[\lambda_x + A + (\lambda_x - A)\cos 2\varphi + V \cdot \sin 2\varphi]. \end{aligned}$$

Diejenigen Werthe von φ und ψ, durch welche der absolute Werth von λ am grössten wird, sind unter denjenigen enthalten, welche den algebraischen Werth von λ zu einem Maximum oder Minimum machen, entsprechen also den Gleichungen:

$$\frac{d\lambda}{d\psi} = 0; \quad \frac{d\lambda}{d\varphi} = 0.$$

Die erstere liefert bei Zugrundelegung des ersten der Ausdrücke 4) von λ:

$$\frac{dA}{d\psi} \cdot \sin^2\varphi + \frac{dV}{d\psi} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} &[\lambda_y \cdot 2\cos\psi(-\sin\psi) + \lambda_z \cdot 2\sin\psi \cdot \cos\psi]\sin\varphi + \\ &\quad + (-\gamma_y \cdot \sin\psi + \gamma_z \cdot \cos\psi)\cos\varphi = 0, \end{aligned}$$

oder

$$2(-\lambda_y + \lambda_z)\sin\psi \cdot \cos\psi \cdot \operatorname{tg}\varphi - \gamma_y \cdot \sin\psi + \gamma_z \cdot \cos\psi = 0,$$

woraus sich sofort die erste der Gleichungen 5) ergiebt. Die andere findet man bei Zugrundelegung des zweiten Ausdruckes 4) von λ aus der Gleichung:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -(\lambda_x - A)\sin 2\varphi + V \cdot \cos 2\varphi = 0.$$

Die Gleichung 6) bedarf keiner Erläuterung weiter.

§. 23. Besondere Fälle der zusammengesetzten Festigkeit eines isotropen Körpers.

Von besonderen Fällen, welche einer allgemeinen Auflösung insofern fähig sind, als wenigstens λ' (voriger Paragraph), d. h. der grösste absolute Werth der resultirenden positiven oder negativen specifischen Ausdehnung λ in einem beliebig gegebenen Punkte des Körpers, als Function von

$$y, z; \; q, B, C; \; P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z; \; \sigma_y, \sigma_z$$

sich darstellen lässt (die Darstellung von max. λ' erfordert noch weitere Einschränkungen hinsichtlich der Gestalt und Belastungsweise des Körpers), sind namentlich folgende zu erwähnen.

1. Wenn die Seitenspannungen σ_y und $\sigma_z = 0$ sind, oder wenn sie wenigstens vernachlässigt werden dürfen, so findet man:

$$\lambda' = \pm \frac{3}{8}\lambda_x + \frac{5}{8}\sqrt{\lambda_x^2 + \frac{16}{25}(\gamma_y^2 + \gamma_z^2)} \quad \ldots \ldots \quad 1),$$

wo dem Gliede $\frac{3}{8}\lambda_x$ dasjenige Vorzeichen beigelegt werden muss, wodurch es mit Rücksicht auf das Zeichen von λ_x positiv wird. Die durch die Belastung und die Dimensionen des Körpers zu erfüllende Bedingungsgleichung 6) des vorigen Paragraphen, welche auch so geschrieben werden kann:

$$k = \max.(E\lambda') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2),$$

nimmt also mit Rücksicht auf die Ausdrücke 1) und 2) (§. 22) von λ_x, γ_y, γ_z und wegen $G = \frac{2}{5}E$ die Form an:

$$k = \max.\Bigg[\pm \frac{3}{8}\left(\frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C}\cdot y + \frac{M_y}{B}\cdot z\right) +$$

$$+ \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C}\cdot y + \frac{M_y}{B}\cdot z\right)^2 + \left(\frac{2P_y}{q} - \frac{M_x}{B}\cdot z\right)^2 + \left(\frac{2P_z}{q} + \frac{M_x}{C}\cdot y\right)^2}\,\Bigg] \quad . \; . \; 3).$$

2. Wenn blos die Ausdehnungen der Längenfasern zu berücksichtigen sind, was der Fall ist, wenn

$$P_y = P_z = M_x = 0$$

ist, weil alsdann $\gamma_y = \gamma_z = 0$ wird, so erhält die Gleichung 2) die einfache Form:

$$k = \max.\left[\pm\left(\frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C}\cdot y + \frac{M_y}{B}\cdot z - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}\right)\right] \quad . \; . \; . \; 4),$$

wo auch dasjenige Vorzeichen des eingeklammerten Ausdrucks zu nehmen ist, wodurch derselbe einen positiven Werth bekommt.

3. Wenn blos die Verschiebungen der Querschnitte zu berücksichtigen sind, was der Fall ist, wenn

$$P_x = M_y = M_z = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

ist, weil alsdann $\lambda_x = 0$ wird, so vereinfacht sich die Gleichung 3), falls mit t die höchstens zulässige specifische Tangentialspannung bezeichnet, und in Gemässheit der Relation 3) des §. 17:

$$\frac{4}{5} k = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

gesetzt wird, in:

$$t = \max. \sqrt{\left(\frac{P_y}{q} - \frac{M_x}{2B} \cdot z\right)^2 + \left(\frac{P_z}{q} + \frac{M_x}{2C} \cdot y\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 6).$$

Bei der Voraussetzung: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ergiebt sich zunächst aus den Relationen 3) des vorigen Paragraphen:

$$\lambda_y = \lambda_z = -\frac{\lambda_x}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a),$$

wie schon aus §. 17 n) bekannt ist. Mit Rücksicht hierauf ist

$$A = -\frac{\lambda_x}{4} (\cos^2\psi + \sin^2\psi) = -\frac{\lambda_x}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b),$$

und die Gleichungen 5) des vorigen Paragraphen zur Berechnung der die Richtung der grössten Ausdehnung bestimmenden Winkel φ und ψ verwandeln sich in:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma_y \cdot \sin\psi - \gamma_z \cdot \cos\psi}{0}; \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{V}{\frac{5}{4} \lambda_x} \quad . \quad . \quad . \quad c).$$

Damit sich die letztern Gleichungen für alle möglichen Werthe von λ_x, γ_y, γ_z in Einklang befinden, muss aus der ersten nothwendig

$$\gamma_y \cdot \sin\psi - \gamma_z \cdot \cos\psi = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\gamma_z}{\gamma_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d)$$

gefolgert werden, sodass sie in der unbestimmten Form $\operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{0}$ erscheint und so der zweiten niemals widersprechen kann, welchen Werth der letztern zufolge der Winkel φ auch haben mag. Aus dieser Gleichung d), welche lehrt, dass die Projection der Richtung der grössten specifischen Ausdehnung auf die Ebene des betreffenden Querschnitts die Richtung der resultirenden Verschiebung $\gamma = \sqrt{\gamma_y^2 + \gamma_z^2}$ oder die gerade entgegengesetzte Richtung hat, ergiebt sich:

$$V = \gamma_y \cdot \cos\psi + \gamma_z \cdot \sin\psi = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi}} (\gamma_y + \gamma_z \cdot \operatorname{tg}\psi) \cdot$$

$$= \frac{\pm \gamma_y}{\sqrt{\gamma_y^2 + \gamma_z^2}} \cdot \frac{\gamma_y^2 + \gamma_z^2}{\gamma_y} = \pm \sqrt{\gamma_y^2 + \gamma_z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e),$$

wodurch die zweite Gleichung c) die Form erhält:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \pm \frac{4}{5} \frac{\sqrt{\gamma_y^2 + \gamma_z^2}}{\lambda_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f).$$

Nun ist nach §. 22 4) mit Rücksicht auf den obigen Werth b) von A:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\lambda_x \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi}}\left(\frac{5}{4}\lambda_x + V\cdot\operatorname{tg}2\varphi\right)\right],$$

folglich, wenn für V und tg 2φ die Werthe e) und f), worin die obern und untern Vorzeichen zusammengehören, substituirt werden:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\lambda_x \pm \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2+\frac{16}{25}(\gamma_y^2+\gamma_z^2)}}\left(\frac{5}{4}\lambda_x + \frac{4}{5}\frac{\gamma_y^2+\gamma_z^2}{\lambda_x}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{8}\lambda_x \pm \frac{5}{8}\sqrt{\lambda_x^2+\frac{16}{25}(\gamma_y^2+\gamma_z^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{g)}.$$

Dieser Ausdruck gehört seiner Herleitung nach zunächst dem Maximum und Minimum des algebraischen Werthes von λ an, und insofern entsprechen beide Vorzeichen der Quadratwurzel der Aufgabe. Sofern es sich aber um λ' handelt, ist nur dasjenige Vorzeichen zu nehmen, wodurch der absolute Werth des Ausdrucks am grössten wird, und dieser $=\lambda'$ zu setzen; was am einfachsten dadurch ausgedrückt wird, dass man

$$\lambda' = \pm\frac{3}{8}\lambda_x + \frac{5}{8}\sqrt{\lambda_x^2+\frac{16}{25}(\gamma_y^2+\gamma_z^2)} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

setzt und hinzufügt, dass das Zeichen + oder — zu nehmen sei, je nachdem λ_x positiv oder negativ ist.

Für den im §. 17 bereits untersuchten speciellen Fall, dass λ_x und somit auch λ_y und λ_z wegen a) $= 0$ sind, ergiebt sich aus f) und 1):

$$\varphi = 45^0; \quad \lambda' = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_y^2+\gamma_z^2} = \frac{\gamma}{2},$$

beides, sowie auch das in der Gleichung d) liegende Gesetz, in Uebereinstimmung mit dem dort Gefundenen.

Die Ableitung der Gleichung 3) aus 1), sowie 6) aus 3) bedarf keiner näheren Erklärung. — Im zweiten Falle, wo $\gamma_y = \gamma_z = 0$ ist, verwandeln sich die Gleichungen 5) des vorigen Paragraphen in:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0; \quad \operatorname{tg}2\varphi = 0,$$

woraus $\varphi = 0$, also

$$\lambda = \lambda_x, \ \text{mithin}\ \lambda' = \pm\lambda_x$$

folgt; die Gleichung 2) erhält die Form:

$$k = \max.(\pm E\lambda_x)$$

und stimmt mit Rücksicht auf den Ausdruck von λ_x [§. 22, 1)] mit der obigen Gleichung 4) überein.

In den Gleichungen dieses Paragraphen sind die früher gefundenen Formeln der absoluten, rückwirkenden, relativen und Torsionsfestigkeit nothwendig als besondere Fälle enthalten. In der That, wenn man erstens ausser

$$P_y = P_z = M_x = 0,$$

welcher Voraussetzung die Gleichung 4) entspricht, auch noch

$$M_y = M_z = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

setzt, so geht die Gleichung 4) über in:

$$k = \max.\left(\pm \frac{P_x}{q}\right),$$

oder, wenn ausserdem P_x und q als constant angenommen werden, und der Absolutwerth von P_x mit P bezeichnet wird, in:

$$k = \frac{P}{q} \quad \text{(siehe §. 3 und 6).}$$

Wenn zweitens ausser $P_y = P_z = M_x = 0$ noch

$$P_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

vorausgesetzt wird, so verwandelt sich die Gleichung 4) in folgende:

$$k = \max.\left[\pm\left(-\frac{M_z}{C}\cdot y + \frac{M_y}{B}\cdot z\right)\right],$$

welche mit Rücksicht auf die Bezeichnungen des §. 16 mit der dortigen Gleichung 3) einerlei ist.

Wird endlich drittens ausser

$$P_x = M_y = M_z = \sigma_y = \sigma_z = 0,$$

welcher Voraussetzung die Gleichung 6) entspricht, auch noch

$$P_y = P_z = 0$$

gesetzt, so verwandelt sich jene Gleichung in:

$$t = \max.\left(\frac{\pm M_x}{2}\cdot\sqrt{\frac{z^2}{B^2}+\frac{y^2}{C^2}}\right),$$

oder, falls M_x für sämmtliche Querschnitte als constant vorausgesetzt und der Absolutwerth mit M bezeichnet wird, in:

$$t = \frac{M}{2}\cdot\max.\sqrt{\frac{z^2}{B^2}+\frac{y^2}{C^2}}$$

in Uebereinstimmung mit §. 21 3).

1848. Poncelet Lehrb. d. Anw. d. Mech. auf Masch. Deutsch v. Schnuse. II. p. 192*.

§. 24. Zusammengesetzte Festigkeit eines homogenen Körpers mit ausgezeichneter Elasticitätsaxe.

Wenn schon die aus geschmiedetem oder gewalztem Metall verfertigten Stücke wegen ihrer mehr oder weniger faserigen Structur nur näherungsweise nach den ein isotropes Material voraussetzenden Formeln der beiden vorigen

Paragraphen berechnet werden können, so ist dies um so mehr bei Constructionstheilen aus Holz der Fall. Für diese sind genauere Formeln zu wünschen, und sie lassen sich auch leicht theoretisch entwickeln, wenn man das Holz als eine homogene Substanz betrachtet, die eine mit den natürlichen Fasern parallele ausgezeichnete Elasticitätsaxe hat, sodass nach allen mit den Fasern gleiche Winkel bildenden Richtungen die Elasticitätsverhältnisse gleich sind, und wenn man ausserdem berücksichtigt, dass bei allen wesentlichen Theilen das Holz in prismatischer Form so verwendet wird, dass seine Fasern mit der Axe des Prismas (allgemeiner mit der in den vorigen Paragraphen so genannten Mittellinie) parallel laufen. Bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse haben jedoch die so erhaltenen allgemeinern Formeln keinen praktischen Werth, da die darin erscheinenden Constanten zum Theil noch gänzlich unbekannt sind.

Wenn blos die Ausdehnungen der Längenfasern, also hier der natürlichen Holzfasern zu berücksichtigen sind, und zudem $\sigma_y = \sigma_z = 0$ gesetzt wird, so findet die Formel 4) des vorigen Paragraphen auch bei der Berechnung hölzerner Theile Anwendung, falls k die bei fehlender Seitenspannung höchstens zulässige specifische Spannung nach der Richtung der Fasern bedeutet. — Ebenso passt auch die Formel 6) des vorigen Paragraphen in dem Falle, wo blos die Verschiebungen in den Querschnitten in Betracht gezogen zu werden brauchen, wenn unter t die höchstens zulässige specifische Tangentialspannung einer auf den Holzfasern senkrechten Ebene nach einer beliebigen Richtung verstanden wird, für welche im §. 21 bei einer nicht mit Stössen verbundenen Belastung der Mittelwerth 80 bis 60 (Kilogramme pro Quadratcentimeter) angegeben worden ist.

In dem ersten und allgemeinern Falle des vorigen Paragraphen, welcher nur die Seitenspannungen σ_y und $\sigma_z = 0$ voraussetzt, würde die entsprechende Formel hier eine andere und zusammengesetztere Form und dazu mehrere verschiedene Constanten erhalten. Wenn man aber deren theilweiser Unkenntniss wegen die Gleichung 3) beibehält, so scheint es hinlänglich zuverlässig, die Constante k im Mittel $= 60$ zu setzen; man kann sie etwas grösser bis $= 80$ nehmen, falls das Holz härter ist und seine natürlichen Fasern im Zustande der eigentlichen Ausdehnung, etwas kleiner bis $= 40$, falls dasselbe weicher ist und seine natürlichen Fasern im Zustande der negativen Ausdehnung oder Verkürzung befindlich sind.

Gehen wir die Entwickelungen des §. 22 mit Rücksicht auf die Voraussetzung, dass für jeden beliebigen Querschnitt die auf ihm senkrechte Axe OX eine ausgezeichnete Elasticitätsaxe des homogenen Materials ist, noch einmal durch, so folgt zunächst aus den von jeder solchen Annahme unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen a) ebenso wie dort:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C} \cdot y + \frac{M_y}{B} \cdot z.$$

Es passt aber nicht auf den vorliegenden Fall die dortige Gleichung b), aus welcher daselbst in Verbindung mit vorstehendem Ausdruck von σ_x derjenige von λ_x abgeleitet wurde. Diese Relation [siehe §. 17, m)] ist vielmehr wesentlich an die Voraussetzung der Isotropie gebunden, und um die entsprechende für den vorlie-

genden Fall zu erhalten, müssen wir auf die Gleichung e) in §. 17 zurückgehen, worin gemäss §. 17, g)

$$A_y = A_z = G_{yz}; \quad G_{xy} = G_{xz}$$

zu setzen ist. Dadurch vereinfacht sie sich, wenn ausserdem der Coefficient von λ_x mit E_x, und jede der beiden gleichen Constanten G_{xy} und G_{xz} mit G_x bezeichnet wird, in:

$$\sigma_x = E_x \cdot \lambda_x + \frac{G_x}{G_{yz}} \cdot \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4} \quad \text{a)},$$

aus welcher in Verbindung mit dem obigen Ausdruck von σ_x

$$\lambda_x = \frac{1}{E_x}\left(\frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C} \cdot y + \frac{M_y}{B} \cdot z - \frac{G_x}{G_{yz}} \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}\right) \quad \text{b)}$$

anstatt der Gleichung 1) in §. 22 hervorgeht. E_x ist der Modulus der absoluten Elasticität nach der Richtung der Holzfasern, G_x derjenige der Schubelasticität bezüglich auf die Verschiebung einer auf den Fasern senkrechten Ebene nach beliebiger Richtung, G_{yz} derjenige der Schubelasticität bezüglich auf die Verschiebung einer mit den Fasern parallelen Ebene nach der auf ihnen senkrechten Richtung.

Die Gleichungen 2) in §. 22 bleiben unverändert; nur tritt G_x an die Stelle von G, sodass man hat:

$$\gamma_y = \frac{1}{G_x}\left(\frac{P_y}{q} - \frac{M_x}{2B} \cdot z\right); \quad \gamma_z = \frac{1}{G_x}\left(\frac{P_z}{q} + \frac{M_x}{2C} \cdot y\right) \quad \text{c)}.$$

Die Gleichungen 3) aber werden wesentlich andere. Um den neuen Ausdruck von λ_y als Function von σ_y, σ_z und λ_x abzuleiten, vertauschen wir in §. 17, e) x mit y, so folgt, wenn wir den Coefficienten von λ_y, nämlich den Modulus der absoluten Elasticität nach jeder auf den Fasern senkrechten Richtung, mit E_{yz} bezeichnen und §. 17, g) berücksichtigen:

$$\sigma_y = E_{yz} \cdot \lambda_y + \frac{2 G_x G_{yz} \cdot \sigma_x + (3 A_x G_{yz} - G_x^2) \cdot \sigma_z}{9 A_x G_{yz} - G_x^2}$$

oder wegen §. 17, h)

$$\sigma_y = E_{yz} \cdot \lambda_y + \frac{2 G_x G_{yz} \cdot \sigma_x + \left(E_x G_{yz} - \frac{G_x^2}{2}\right) \cdot \sigma_z}{3 E_x G_{yz} + \frac{G_x^2}{2}},$$

folglich mit Rücksicht auf den obigen Ausdruck a) von σ_x:

$$\lambda_y = \frac{\left(3 E_x G_{yz} + \frac{G_x^2}{2}\right) \cdot \sigma_y - 2 G_x G_{yz} \cdot \left(E_x \cdot \lambda_x + \frac{G_x}{G_{yz}} \cdot \frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}\right) - \left(E_x G_{yz} - \frac{G_x^2}{2}\right) \cdot \sigma_z}{E_{yz}\left(3 E_x G_{yz} + \frac{G_x^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{E_x G_{yz} (3 \sigma_y - \sigma_z)}{E_{yz}\left(3 E_x G_{yz} + \frac{G_x^2}{2}\right)} - \frac{2 E_x G_x G_{yz}}{E_{yz}\left(3 E_x G_{yz} + \frac{G_x^2}{2}\right)} \cdot \lambda_x.$$

Man hat aber wegen der zwischen den Constanten E_x, E_{yz}, G_x, G_{yz} stattfindenden Relation §. 17, k):

$$E_{yz} = \frac{8\,G_{yz}}{3 + \frac{G_x^2}{2\,E_x\,G_{yz}}} = \frac{8\,E_x\,G_{yz}^2}{3\,E_x\,G_{yz} + \frac{G_x^2}{2}},$$

wodurch der für λ_y gefundene Ausdruck sich vereinfacht in:

$$\lambda_y = \frac{1}{8\,G_{yz}}(3\,\sigma_y - \sigma_z) - \frac{G_x}{G_{yz}} \cdot \frac{\lambda_x}{4}$$

Ebenso ist natürlich:

$$\lambda_z = \frac{1}{8\,G_{yz}}(3\,\sigma_z - \sigma_y) - \frac{G_x}{G_{yz}} \cdot \frac{\lambda_x}{4} \quad \ldots\ldots \text{d)}.$$

Die Ausdrücke 4) in §. 22 für die in einem beliebigen Punkte A eines beliebigen Querschnitts nach einer beliebigen durch die Winkel φ und ψ bestimmten Richtung AB stattfindende specifische Ausdehnung, nämlich:

$$\lambda = \lambda_x \cdot \cos^2\varphi + A \cdot \sin^2\varphi + V \cdot \sin\varphi\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{2}[\lambda_x + A + (\lambda_x - A)\cos 2\varphi + V \cdot \sin 2\varphi] \quad . \; . \quad \text{e)},$$

wo

$$A = \lambda_y \cdot \cos^2\psi + \lambda_z \cdot \sin^2\psi; \quad V = \gamma_y \cdot \cos\psi + \gamma_z \cdot \sin\psi$$

ist, sind von jeder Voraussetzung hinsichtlich der materiellen Beschaffenheit des Körpers unabhängig und gelten also auch hier. Weil aber jetzt die höchstens zulässige specifische Ausdehnung nicht nach jeder Richtung gleich ist, so kommt es nicht sowohl auf die Ausmittelung derjenigen Richtung an, nach welcher im Punkte A die specifische Ausdehnung selbst am grössten ist, als vielmehr derjenigen, nach welcher ihr Verhältniss zu der entsprechenden höchstens zulässigen Ausdehnung, das höchstens $= 1$ werden darf, am grössten ist.

Bezeichnet man den Absolutwerth der höchstens zulässigen specifischen Ausdehnung nach der Richtung der ausgezeichneten Elasticitätsaxe (der natürlichen Holzfasern) mit λ_x^0, nach irgend einer darauf senkrechten Richtung mit λ_{yz}^0, so muss man annehmen, dass im Punkte A die Ausdehnung nach jeder beliebigen Richtung AB (*Fig.* 29) den grössten zulässigen Absolutwerth λ^0 hat, wenn

$$\lambda_x = \lambda_x^0 \text{ und } \lambda_y = \lambda_z = \lambda_{yz}^0$$

oder

$$\lambda_x = -\lambda_x^0 \text{ und } \lambda_y = \lambda_z = -\lambda_{yz}^0$$

ist, und Verschiebungen, die ja stets auf Ausdehnungen zurückzuführen sind, nicht stattfinden. Hiernach ist der Gleichung e) zufolge:

$$\lambda^0 = \lambda_x^0 \cdot \cos^2\varphi + (\lambda_{yz}^0 \cdot \cos^2\psi + \lambda_{yz}^0 \cdot \sin^2\psi) \cdot \sin^2\varphi = \lambda_x^0 \cdot \cos^2\varphi + \lambda_{yz}^0 \cdot \sin^2\varphi$$

oder auch

$$\lambda^0 = \frac{\lambda_x^0 + \lambda_{yz}^0}{2} + \frac{\lambda_x^0 - \lambda_{yz}^0}{2} \cdot \cos 2\varphi = \frac{1}{2}(s + d \cdot \cos 2\varphi) \quad \ldots \text{f)},$$

wenn zur Abkürzung

$$\lambda_x^0 + \lambda_{yz}^0 = s; \quad \lambda_x^0 - \lambda_{yz}^0 = d$$

gesetzt wird.

Nun ist also

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda^0} &= \frac{\lambda_x \cdot \cos^2\varphi + A \cdot \sin^2\varphi + V \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\lambda_x^0 \cdot \cos^2\varphi + \lambda_{yz}^0 \cdot \sin^2\varphi} \\ &= \frac{\lambda_x + A + (\lambda_x - A)\cos 2\varphi + V \cdot \sin 2\varphi}{s + d \cdot \cos 2\varphi}\end{aligned}\right\} \quad \text{g)},$$

und es kommt darauf an, diejenigen Winkel φ und ψ zu finden, durch welche der Absolutwerth des Verhältnisses $\frac{\lambda}{\lambda^0}$ am grössten wird. Dieselben sind unter denjenigen enthalten, wofür der positive oder negative Werth dieses Verhältnisses ein Maximum oder Minimum ist, entsprechen also den Gleichungen:

$$\frac{d\frac{\lambda}{\lambda^0}}{d\psi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\frac{\lambda}{\lambda^0}}{d\varphi} = 0.$$

Die erstere liefert bei Zugrundelegung des ersten der Ausdrücke g) ebenso wie im §. 22:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma_y \cdot \sin\psi - \gamma_z \cdot \cos\psi}{2(-\lambda_y + \lambda_z)\sin\psi \cdot \cos\psi} \quad \text{h)}.$$

Aus der zweiten findet man, wenn noch zur Abkürzung

$$\lambda_x + A = \sigma; \quad \lambda_x - A = \delta$$

gesetzt wird,

$$(s\delta - d\sigma)\sin 2\varphi - sV \cdot \cos 2\varphi - dV = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-s(s\delta - d\sigma) \pm d\sqrt{(s^2 - d^2)V^2 + (s\delta - d\sigma)^2}}{d^2 V^2 - (s\delta - d\sigma)^2} \cdot V \quad \text{i)}.$$

Wird endlich der grösste absolute Werth, den das Verhältniss $\frac{\lambda}{\lambda^0}$ für die den Gleichungen h) und i) entsprechenden Winkel φ und ψ annimmt, mit $\frac{\lambda'}{\lambda^0}$ bezeichnet, so wird die durch die Belastung oder die Dimensionen des Constructionstheiles zu erfüllende Bedingung ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\max.\left(\frac{\lambda'}{\lambda^0}\right) = 1 \quad \text{k)},$$

wobei das Maximum der Grösse $\frac{\lambda'}{\lambda^0}$ mit Rücksicht darauf zu ermitteln ist, dass dieselbe sowohl mit y und z von einem zum andern Punkt eines beliebigen Querschnitts, als auch mit q, B, C, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, σ_y, σ_z, oder, wenn der Körper eine prismatische Form hat, blos mit P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, σ_y, σ_z von einem zum andern Querschnitt im Allgemeinen sich ändert.

Wenn statt der Constanten λ_x^0 und λ_{yz}^0 die entsprechenden bei fehlender Seitenspannung höchstens zulässigen Normalspannungen k_x und k_{yz} gegeben sind, so ist zu berücksichtigen, dass man hat:

$$\lambda_x^0 = \frac{k_x}{E_x}; \quad \lambda_{yz}^0 = \frac{k_{yz}}{E_{yz}} \quad \text{l)}.$$

Was die im vorigen Paragraphen hervorgehobenen besonderen Fälle betrifft, so sind zwar:

1) wenn blos die Seitenspannungen σ_y und σ_z = Null vorausgesetzt werden, auch hier die Gleichungen h) und i) einer allgemeinen Auflösung fähig, indem sich wegen $\lambda_y = \lambda_z$ aus h)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\gamma_z}{\gamma_y}$$

und dann aus i) der entsprechende Werth von φ ergiebt. Allein die Substitution in dem Ausdrucke g) von $\frac{\lambda}{\lambda^0}$ führt zu einer sehr zusammengesetzten Formel, die zudem schon wegen der Unkenntniss der darin vorkommenden Constanten ohne Interesse ist.

2) Sind blos die Ausdehnungen der Längenfasern (der natürlichen Holzfasern) zu berücksichtigen, d. h. ist

$$P_y = P_z = M_x = 0,$$

somit $\gamma_y = \gamma_z = 0$, also $V = 0$ und wegen h) und i) auch $\varphi = 0$, so ist wegen g)

$$\frac{\lambda'}{\lambda^0} = \frac{\pm\lambda_x}{\lambda_x^0} = \frac{\pm E_x \cdot \lambda_x}{k_x}.$$

Aus der Gleichung k) wird also:

$$\max.\left(\frac{\pm E_x \cdot \lambda_x}{k_x}\right) = 1, \quad \text{oder} \quad k_x = \max.(\pm E_x \cdot \lambda_x)$$

oder mit Rücksicht auf den Ausdruck b) von λ_x:

$$k_x = \max.\left[\pm\left(\frac{P_x}{q} - \frac{M_z}{C}\cdot y + \frac{M_y}{B}\cdot z - \frac{G_x}{G_{y\,z}}\cdot\frac{\sigma_y + \sigma_z}{4}\right)\right] \ldots \text{m}).$$

Diese Gleichung stimmt mit 4) im vorigen Paragraphen dann und nur dann überein, wenn noch $\sigma_y = \sigma_z = 0$ gesetzt wird.

3) Sind blos die Verschiebungen in den Querschnitten zu berücksichtigen, d. h. ist

$$P_x = M_y = M_z = \sigma_y = \sigma_z = 0,$$

somit $\lambda_x = 0$, also $\lambda_y = \lambda_z = 0$ und $A = 0$, so erhält man aus h)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\gamma_z}{\gamma_y},$$

ferner, weil

$$V = \pm\sqrt{\gamma_y^2 + \gamma_z^2} = \pm\gamma \quad [\text{§. 23, c)}]$$

und $\sigma = \delta = 0$ wird, aus i)

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\pm d\sqrt{(s^2 - d^2)\gamma^2}}{d^2\gamma^2}\cdot(\pm\gamma) = \pm\frac{\sqrt{s^2 - d^2}}{d}.$$

Dem zweiten der Ausdrücke g) zufolge findet man nun das Maximum oder Minimum des algebraischen Werthes von $\frac{\lambda}{\lambda^0}$

$$= \frac{V \cdot \sin 2\varphi}{s + d \cdot \cos 2\varphi} = \frac{\pm \gamma \cdot \operatorname{tg} 2\varphi}{\pm s\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} + d} = \frac{\pm \frac{\sqrt{s^2 - d^2}}{d}}{\pm s\sqrt{1 + \frac{s^2 - d^2}{d^2}} + d} \cdot \gamma$$

$$= \frac{\pm \sqrt{s^2 - d^2}}{\pm s^2 + d^2} \cdot \gamma.$$

Dem grössten absoluten Werthe dieses Ausdrucks entspricht der kleinste absolute Werth des Nenners; also ist

$$\frac{\lambda'}{\lambda^0} = \frac{-\sqrt{s^2 - d^2}}{-s^2 + d^2} \cdot \gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{s^2 - d^2}}$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von s und d:

$$\frac{\lambda'}{\lambda^0} = \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda_x^0 \cdot \lambda_{yz}^0}} = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{E_x \cdot E_{yz}}{k_x \cdot k_{yz}}},$$

und die Gleichung k) erhält die Form:

$$2\sqrt{\frac{k_x \cdot k_{yz}}{E_x \cdot E_{yz}}} = \max. \gamma = \max. \sqrt{\gamma_y^2 + \gamma_z^2}$$

$$= \frac{1}{G_x} \cdot \max. \sqrt{\left(\frac{P_y}{q} - \frac{M_x}{2B} \cdot z\right)^2 + \left(\frac{P_z}{q} + \frac{M_x}{2C} \cdot y\right)^2},$$

sodass sie, wenn die constante Grösse

$$2G_x\sqrt{\frac{k_x \cdot k_{yz}}{E_x \cdot E_{yz}}} = t \quad \text{n)}$$

gesetzt wird, mit der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen übereinstimmt. — Für einen isotropen Körper würde

$$E_x = E_{yz} = E, \quad k_x = k_{yz} = k, \quad G_x = G = \frac{2}{5}E,$$

folglich

$$t = \frac{4}{5}k$$

sein, wie bekannt.

§. 25. Sehr kurzes Prisma, an einem Ende befestigt, am andern belastet.

In der Absicht, die in den vorigen Paragraphen gewonnenen Formeln auf einige Beispiele anzuwenden, welche bei technischen Constructionen häufiger vorkommen, wollen wir zuvörderst eine Correction der in §. 7 entwickelten Theorie der relativen Festigkeit erwähnen, welche nöthig wird, wenn die derselben dort zu Grunde liegende Vernachlässigung der Verschiebungen der Querschnitte im Vergleich mit der Ausdehnung und Verkürzung der Längenfasern wegen der sehr geringen Länge des Körpers nicht mehr zulässig ist. Wir beschränken uns darauf, den einfachsten in §. 8 besprochenen Fall eines an

einem Ende eingeklemmten prismatischen Körpers zu betrachten unter der Voraussetzung, dass derselbe sehr kurz und am freien Ende durch eine die Axe senkrecht schneidende Kraft P belastet ist. Zudem mag diese Kraft mit einer der beiden Schwerpunkts-Hauptaxen der Querschnitte parallel, also z. B. in einer Symmetrie-Ebene des Körpers enthalten sein.

Die grösste Ausdehnung findet in einem Punkte des Umfangs des befestigten Querschnitts statt, welcher von der auf der Kraft P senkrechten Schwerpunkts-Hauptaxe desselben am weitesten entfernt ist, aber nach einer gegen die Axe geneigten Richtung. Indem man diese grösste specifische Ausdehnung $= \frac{k}{E}$ setzt, findet man nach §. 23, 3)

$$k = P \cdot \frac{ae}{B}\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{2B}{aeq}\right)^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad 1).$$

Dabei bedeutet:

a die freie Länge des Körpers,

e die grösste Entfernung eines Punktes des Querschnitts von seiner auf der Richtung von P senkrechten Schwerpunkts-Hauptaxe,

B das auf letztere bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts,

q den Inhalt desselben.

Nach §. 8, 2) würde man haben:

$$P = \frac{k \cdot \frac{B}{e}}{a}, \quad \text{also } k = P \cdot \frac{ae}{B}.$$

Die wirkliche Tragfähigkeit des Körpers ist also nur

$$\alpha = \frac{8}{3 + 5\sqrt{1 + \left(\frac{2B}{aeq}\right)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

mal so gross, als sie sich ohne Rücksicht auf die Verschiebungen der Querschnitte herausstellt. Der stets echte Bruch α wird um so kleiner und zwar beliebig klein, je mehr bei sonst gleichen Umständen die Länge a des Körpers abnimmt; er nähert sich dagegen um so mehr der Einheit, je mehr die Länge zunimmt.

Ist insbesondere der Querschnitt ein Rechteck, und ist

b die auf der Kraft P senkrechte,

c die mit P parallele Seite desselben, so wird:

$$k = P \cdot \frac{6a}{bc^2}\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{c}{3a}\right)^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad 3).$$

Für $a = 3c$; c; $\frac{c}{3}$ ist $\alpha = 0{,}996$; $0{,}967$; $0{,}794$, woraus man sieht, dass die Vernachlässigung der Verschiebungen einen nicht in Betracht kommenden Fehler verursacht, sobald der Körper nur etwas mehr lang als dick ist, dass aber entgegengesetzten Falles der Fehler allerdings sehr beträchtlich werden kann.

Wollte man das Längenprofil des Körpers so bestimmen, dass er bei gegebener Belastung P und Länge a, und bei überall rechteckigem Querschnitt von gegebener Breite b ein Körper von gleichem Widerstande ist (siehe §. 9), so müsste man die Höhe y als Function des Abstandes x vom freien Ende der Bedingung gemäss berechnen, dass die grösste specifische Ausdehnung in jedem Querschnitt $= \frac{k}{E}$ ist. Man findet:

$$y = \sqrt{\frac{P}{4kb}\left[9x + \frac{25P}{8kb} + \sqrt{\left(9x + \frac{25P}{8kb}\right)^2 + 144x^2}\right]} \quad \ldots \quad 4).$$

Es würde genügen, die Begrenzung des Längenprofils als eine möglichst gefällige Curve aus freier Hand zu zeichnen, nachdem nur für $x = 0$, $x = a$ und für eine mittlere Stelle, etwa $x = \frac{a}{2}$ oder $\frac{a}{3}$ die Werthe von y berechnet und aufgetragen worden sind. Für $x = 0$ findet man:

$$y = \frac{5P}{4kb} = \frac{P}{\frac{4}{5}k \cdot b},$$

wie es ohne Weiteres als nothwendig hätte erkannt werden können, da $\frac{4}{5}k$ die höchstens zulässige specifische Tangentialspannung eines isotropen Materials ist (siehe §. 17).

Es mag noch bemerkt werden, dass die vorstehenden Resultate sich unmittelbar auf den Fall übertragen lassen, dass ein prismatischer Körper, auf zwei nahe beisammen befindlichen Stützen liegend, durch eine in der Mitte zwischen denselben seine Axe senkrecht schneidende und mit einer Schwerpunkts-Hauptaxe der Querschnitte parallele Kraft P angegriffen wird. Man kann nämlich den Körper als im mittlern Querschnitt befestigt, und jede Hälfte an der Stelle der Stütze als durch die Kraft $\frac{P}{2}$ belastet betrachten.

Ist AB (*Fig. 30*) die Axe des prismatischen Körpers, soweit er aus der Wand, worin er befestigt ist, hervorragt, A der Schwerpunkt des in jener Wandfläche liegenden festgehaltenen Querschnitts, B der Schwerpunkt der freien Endfläche, also zugleich der Angriffspunkt der Kraft P; ist ferner O ein beliebiger zwischen A und B liegender Punkt der Axe im Abstande x von B, und werden die rechtwinkeligen Coordinatenaxen OX, OY, OZ, von denen die beiden letztern in die Schwerpunkts-Hauptaxen des zugehörigen Querschnitts fallen, so gerichtet angenommen, wie aus *Fig. 30* ersichtlich ist, so hat man in der Gleichung 3) in §. 23

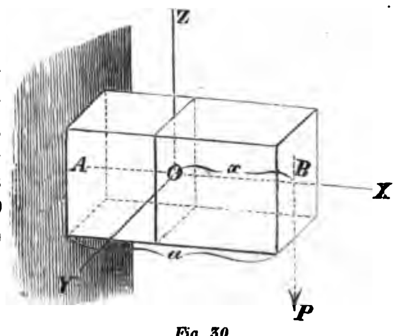


Fig. 30.

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -P,$$
$$M_x = 0, \quad M_y = Px, \quad M_z = 0$$

zu setzen, wodurch man als die zu erfüllende Bedingung erhält:

$$k = \max.\left[\pm \frac{3}{8}\frac{Px}{B}\cdot z + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{Px}{B}\cdot z\right)^2 + \left(\frac{-2P}{q}\right)^2}\right].$$

Dem Maximum des Ausdrucks in der Parenthese entspricht offenbar der grösste Werth a von x und der grösste Absolutwerth e von z; sonach geht die vorstehende Gleichung über in:

$$k = \frac{3}{8}\frac{Pa}{B}\cdot e + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{Pa}{B}\cdot e\right)^2 + \left(\frac{2P}{q}\right)^2}$$

in Uebereinstimmung mit der obigen Gleichung 1).

Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$e = \frac{c}{2}, \quad q = bc, \quad B = \frac{bc^3}{12}.$$

Durch die Substitution dieser Werthe findet man die Gleichung 3). Setzt man in derselben x statt a, y statt c, so liefert sie durch Entwickelung von y den Ausdruck 4) für die Höhe, welche dem Querschnitt im Abstande x vom freien Ende B gegeben werden muss, damit die grösste specifische Ausdehnung in demselben $= \frac{k}{E}$ sei.

Navier setzt die Tragfähigkeit eines kurzen prismatischen Körpers von rechteckigem Querschnitt, welcher einerseits befestigt, andererseits belastet ist, der Grösse

$$\frac{bc}{\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}}$$

proportional, wo D einen gewissen von dem Widerstande des Körpers gegen Abschiebung in der Ebene eines Querschnitts abhängigen constanten Coefficienten bedeutet. Jedoch beruht dieses Ergebniss auf einer weit weniger stichhaltigen Betrachtung, als unsere Formel 3), welche von Poncelet angegeben wird.

Die Biegung des hier betrachteten Körpers ist in Folge der Verschiebung der Querschnitte natürlich auch eine andere, nämlich grössere, als sie in §. 8 bestimmt worden ist; und zwar ist dieser Einfluss auf die Biegung grösser, bei einer bedeutendern Länge des Körpers noch merklich, als derjenige auf die Widerstandsfähigkeit. Ist δ_1 diejenige Durchbiegung, welche der freie Endpunkt B der Axe blos infolge der Ausdehnung und Verkürzung der Längenfasern, also der Neigung der Querschnitte gegen einander, δ_2 diejenige, welche er blos infolge der gegenseitigen Verschiebungen derselben erfährt, so ist

$$\delta_1 = \frac{P}{EB}\cdot\frac{a^3}{3} \quad [\text{§. 8, 4)}],$$

$$\delta_2 = \frac{P:q}{G}\cdot a = \frac{Pa}{Gq}$$

nach der Definition der Constanten G. Es verhält sich also

$$\delta_1 : \delta_2 = 1 : \frac{3EB}{Gqa^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{a)},$$

oder für einen isotropen Körper, wo $G = \frac{2}{5} E$ ist,

$$\delta_1 : \delta_2 = 1 : \frac{15}{2} \cdot \frac{B}{q a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \text{b)},$$

und wenn zudem der Querschnitt ein Rechteck ist,

$$\delta_1 : \delta_2 = 1 : \frac{5}{8} \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \text{c)},$$

z. B. für $a = 6c, \quad 3c, \quad c, \quad \frac{c}{3}$:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0{,}017; \quad 0{,}069; \quad 0{,}625; \quad 5{,}625.$$

Bei den in den Paragraphen 13 und 14 abgehandelten Fällen der relativen Festigkeit müsste man bei geringer Länge der Stücke diesen Einfluss der Verschiebungen auf die Biegung berücksichtigen, um zunächst die davon abhängigen Drucke auf die Stützen oder Befestigungsstellen und demnächst die Tragfähigkeit zu berechnen.

1833. Navier *Rés. des leçons sur l'appl. de la méc. etc.* Deutsch von Westphal u. d. T.: „Mech. der Baukunst." 1851*. p. 77.
1848. *Poncelet Lehrb. d. Anw. d. Mech. auf Maschinen. Deutsch v. Schnuse. II, §. 226*.

§. 26. Excentrisch belastete Hänge- und Standsäulen.

Wenn ein an einem Ende befestigter prismatischer Körper einer Zugkraft unterworfen ist, deren Richtungslinie in einem mehr oder weniger grossen Abstande mit seiner Axe parallel ist, so ist seine Widerstandsfähigkeit bekanntlich um mehr oder weniger kleiner, als sie sein würde, wenn die Kraft in der Axe selbst wirkte und also die einfache absolute Elasticität oder Festigkeit in Anspruch nähme. Der Körper wird nämlich nicht nur ausgereckt, sondern gleichzeitig gebogen; es liegt also die zusammengesetzte Festigkeit und zwar derjenige Fall derselben vor, wo nur die Ausdehnungen der Längenfasern in Betracht kommen (§. 23, 2).

Denken wir uns als Repräsentanten eines auf die angegebene Weise belasteten Körpers eine in verticaler Lage oben befestigte, unten durch ein Gewicht P im Abstande p von der Axe belastete prismatische sogenannte Hängesäule, und nehmen wir an, dass die Richtungslinie von P jeden Querschnitt in einer zu seinem Schwerpunkte gehörigen Hauptaxe schneidet, wie es z. B. stets dann der Fall ist, wenn die durch den Angriffspunkt von P und die Axe der Hängesäule gehende Ebene wie gewöhnlich eine Symmetrie-Ebene der letztern ist. Diese Ebene ist dann zugleich die Biegungsebene, d. h. sie enthält die elastische Linie oder den geometrischen Ort der ursprünglich in der Axe befindlich gewesenen materiellen Punkte, und die Biegungsaxe, d. h. die durch den Schwerpunkt gehende, auf der Biegungsebene senkrechte gerade Linie eines jeden Querschnittes ist dessen zweite Hauptaxe. Wenn nun die Biegung der Säule so geringfügig ist, dass die seit-

liche Verrückung selbst des untern Endpunktes der elastischen Linie gegen die Excentricität p der Belastung vernachlässigt werden kann, so ist jeder Querschnitt mit gleicher Wahrscheinlichkeit der Bruchquerschnitt, und der gefährliche Punkt eines solchen ist entweder derjenige, welcher nach der convexen, oder derjenige, welcher nach der concaven Seite des gebogenen Körpers hin von der Biegungsaxe am weitesten entfernt ist. Ist

e' der erstere, e'' der letztere grösste Abstand,

ferner

q der Flächeninhalt des Querschnitts,

B dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Biegungsaxe,

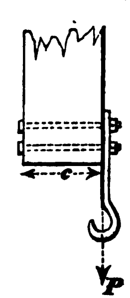
so ist die zulässige Belastung oder erforderliche Stärke der Hängesäule nach einer der beiden folgenden Formeln zu berechnen:

$$k = P\left(\frac{1}{q} + \frac{pe'}{B}\right), \quad \text{wenn } e'' - e' < \frac{2B}{pq} \quad \ldots \quad 1),$$

$$k = P\left(-\frac{1}{q} + \frac{pe''}{B}\right), \quad \text{wenn } e'' - e' > \frac{2B}{pq} \quad \ldots \quad 2)$$

ist. In der Regel wird erstere Formel, nämlich die Ausdehnung der äussersten Faser an der convexen Seite maassgebend sein, jedenfalls immer dann, wenn e'' nicht grösser als e', also z. B. $e'' = e'$ ist.

Der Querschnitt sei ein Rechteck, die mit der Biegungsaxe parallele Seite $= b$, die andere $= c$. Dann ist nach 1)


Fig. 31.

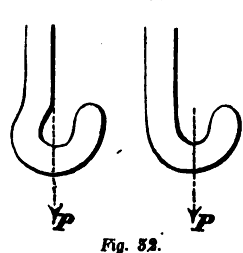
$$k = \frac{P}{bc}\left(1 + \frac{6p}{c}\right) \quad \ldots \quad 3),$$

z. B. für $p = \frac{c}{2}$ (siehe *Fig. 31*)

$$k = 4\frac{P}{bc},$$

die Tragfähigkeit also vier mal so klein, als wenn $p = 0$ oder die Zugkraft in der Axe selbst wirksam ist.

Der Querschnitt sei ein Kreis, der Radius $= r$. Dann ist nach 1)


Fig. 32.

$$k = \frac{P}{\pi r^2}\left(1 + \frac{4p}{r}\right) \quad \ldots \quad 4),$$

z. B. (siehe *Fig. 32*) für $p = r$, $k = 5\frac{P}{\pi r^2}$,

für $p = 2r$, $k = 9\frac{P}{\pi r^2}$,

die Tragfähigkeit also bezüglich fünf und neun mal so klein, als wenn die Zugkraft in der Axe wirkt.

Für ein Prisma, welches durch eine mit der Axe parallele Druckkraft angegriffen wird, also z. B. für eine verticale unten befestigte, oben durch ein Gewicht P excentrisch im Abstande p von der Axe belastete prismatische Standsäule gelten unter denselben Voraussetzungen und bei den-

selben Bedeutungen der Buchstaben ganz analoge Formeln, indem man nämlich nur nöthig hat, e' mit e'' zu vertauschen. Die Berechnung einer solchen Standsäule hat also zu geschehen nach der Gleichung:

$$k = P\left(\frac{1}{q} + \frac{pe''}{B}\right), \text{ wenn } e' - e'' < \frac{2B}{pq} \quad \ldots \quad 5),$$

oder

$$k = P\left(-\frac{1}{q} + \frac{pe'}{B}\right), \text{ wenn } e' - e'' > \frac{2B}{pq} \quad \ldots \quad 6).$$

Es findet aber ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden hier betrachteten Fällen statt, **wenn die Biegung der Säule so beträchtlich ist, dass die seitliche Ausweichung f des freien Endpunktes der elastischen Linie nicht gegen die Excentricität p der Belastung vernachlässigt werden darf**, was alsdann eintreten wird, wenn unter übrigens gleich bleibenden Umständen die Länge l der Säule mehr und mehr zunimmt. Während nämlich die Tragfähigkeit der Hängesäule dadurch nicht geändert wird, nimmt diejenige der Standsäule wesentlich ab. Letztere ist alsdann nach der Formel:

$$k = P\left[\frac{1}{q} + \frac{pe''}{B \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right)}\right], \text{ wenn } e' - e'' < \frac{2B}{pq} \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right) \ldots 7),$$

oder

$$k = P\left[-\frac{1}{q} + \frac{pe'}{B \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right)}\right], \text{ wenn } e' - e'' > \frac{2B}{pq} \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right) \ldots 8)$$

ist, zu berechnen.

Was zunächst die **Hängesäule** betrifft, unter der Voraussetzung, dass die Biegung verschwindend klein ist, so sei AB (*Fig. 33*) ihre Axe, $BC = p$ der senkrecht mit derselben verbundene Arm, an dessen Endpunkte C die Kraft P angreifend zu denken ist, O ein beliebiger Punkt der Axe, OZ die in der Biegungsebene ABC liegende, OY die auf ihr senkrechte Schwerpunkts-Hauptaxe oder die Biegungsaxe des bezüglichen Querschnitts. Wird OZ, wie *Fig. 33* zeigt, so gerichtet angenommen, dass dem Moment von P in Bezug auf OY die Drehungsrichtung ZX entspricht, so hat man nach §. 23, 4), indem

$$P_x = P,\ M_y = Pp,\ M_z = 0,\ \sigma_y = \sigma_z = 0$$

ist, die Bedingungsgleichung:

$$k = \max.\left[\pm\left(\frac{P}{q} + \frac{Pp}{B} \cdot z\right)\right],$$

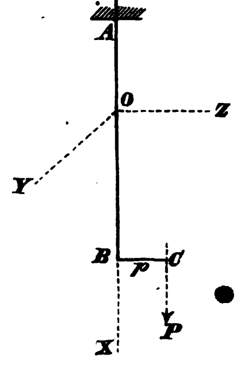


Fig. 33.

und da der Ausdruck in der Parenthese, welcher bezüglich auf z vom ersten Grade ist, seinen grössten Absolutwerth nur für einen der beiden Grenzwerthe e' oder $-e''$ von z annehmen kann, so erhält man die beiden Gleichungen 1) und 2), von denen diejenige ausgewählt werden

muss, welcher unter sonst gleichen Umständen die kleinere Tragfähigkeit entspricht. Das ist die erste oder zweite, je nachdem

$$\frac{1}{q} + \frac{pe'}{B} \gtrless -\frac{1}{q} + \frac{pe''}{B}$$

oder

$$e'' - e' \lesseqgtr \frac{2B}{pq}$$

ist.

Die Formeln 3) und 4) für den rechteckigen und kreisförmigen Querschnitt werden dadurch erhalten, dass im ersten Falle:

$$q = bc, \quad B = \frac{bc^3}{12}, \quad e' = e'' = \frac{c}{2},$$

im zweiten Falle:

$$q = \pi r^2, \quad B = \frac{\pi r^4}{4}, \quad e' = e'' = r$$

gesetzt wird.

Wenn man mit Rücksicht auf das verschiedene Maass der absoluten und rückwirkenden Festigkeit des angewendeten Materials die Anordnung so treffen will, dass die specifische positive Ausdehnung höchstens $= \frac{k'}{E}$, die specifische Verkürzung höchstens $= \frac{k''}{E}$ ist, so hat man in 1) und 2) bezüglich k' und k'' statt k zu setzen, also von den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} k' &= P\left(\frac{1}{q} + \frac{pe'}{B}\right) \\ k'' &= P\left(-\frac{1}{q} + \frac{pe''}{B}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{a)}$$

die ungünstigere zu Grunde zu legen. Wenn es thunlich ist, so wird es am vortheilhaftesten sein, eine solche Querschnittsform zu wählen, dass beiden Gleichungen dieselbe Tragfähigkeit entspricht, dass also

$$\frac{k'}{k''} = \frac{1 + \frac{pq}{B} \cdot e'}{-1 + \frac{pq}{B} \cdot e''} \quad \text{b)}$$

ist, weil dann die äussersten gedehnten und verkürzten Fasern gleichzeitig ihre höchstens zulässigen Längenänderungen erleiden.

Was die Standsäule betrifft unter der Voraussetzung, dass die Biegung verschwindend klein ist, so hat man bei der aus *Fig. 34* ersichtlichen Richtung der Axen OX, OY, OZ in der Gleichung 4) des §. 23 zu setzen:

$$P_x = -P, \quad M_y = -Pp, \quad M_z = 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

und findet so die Gleichungen 5) und 6) entsprechend den beiden Grenzwerthen e'' und $-e'$ von z. — Auf die Ver-

Fig. 34.

schiedenheit des Maasses der absoluten und rückwirkenden Festigkeit Rücksicht nehmend, hat man strenger die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} k'' &= P\left(\frac{1}{q} + \frac{p e''}{B}\right) \\ k' &= P\left(-\frac{1}{q} + \frac{p e'}{B}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{c)}$$

und die Gestaltung des Querschnitts ist die vortheilhafteste, wenn

$$\frac{k''}{k'} = \frac{1 + \frac{pq}{B} \cdot e''}{-1 + \frac{pq}{B} \cdot e'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{d)}$$

ist.

Ist die Biegung der Hängesäule beträchtlicher, sodass die Ausweichung $BD = f$ (*Fig. 35*) aus der Verticalen $A\Xi$ nicht gegen $BC = p$ verschwindet, während jedoch die Neigung der elastischen Linie AB gegen die Verticale überall sehr klein ist und somit unter anderm auch die Horizontalprojection des auf ihr senkrechten Armes BC ihm selbst gleich, also $= p$ gesetzt werden darf, so hat man, wenn die Verrückung des beliebigen Punktes O der elastischen Linie aus der Verticalen $A\Xi$ mit η bezeichnet wird,

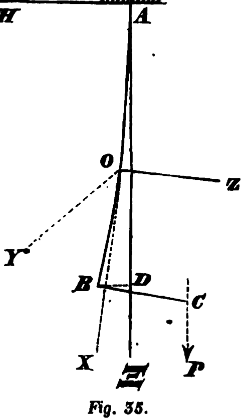


Fig. 35.

$$P_x = P, \quad M_y = P(p - f + \eta),$$

folglich

$$k = \max.\left[\pm\left(\frac{P}{q} + \frac{P(p-f+\eta)}{B} \cdot z\right)\right],$$

welche Bedingungsgleichung auf eine der beiden obigen 1) und 2) hinausläuft, da dem grössten Absolutwerthe des Ausdrucks in der Parenthese der grösste Werth von η, also $\eta = f$ entspricht. Die Berücksichtigung der Biegung bringt also hier keine Aenderung hervor, ausgenommen, dass nicht mehr jeder Querschnitt mit gleichem Rechte, sondern der nächste unmittelbar über dem Arme BC vorzugsweise der Bruchquerschnitt ist. Die grösste Ausdehnung und Spannung nimmt von A bis B stetig zu und hat bei B denselben Ausdruck, den sie zuvor in allen Querschnitten hatte.

Anders verhält es sich mit der **Standsäule bei grösserer Biegung**. Hier ist (*Fig. 36*)

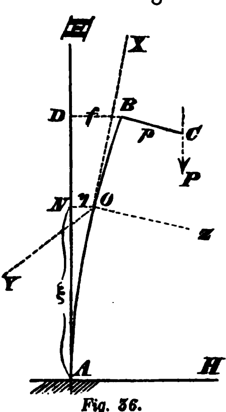


Fig. 36.

$$P_x = -P, \quad M_y = -P(p + f - \eta),$$

folglich

$$k = \max.\left[\pm\left(-\frac{P}{q} - \frac{P(p+f-\eta)}{B} \cdot z\right)\right].$$

Diese Bedingungsgleichung reducirt sich aber, da dem Maximum des absoluten Werthes der Grösse in der Parenthese das Minimum von η, also $\eta = 0$ entspricht, auf eine der beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} k &= P\left(\frac{1}{q} + \frac{(p+f)e''}{B}\right) \\ k &= P\left(-\frac{1}{q} + \frac{(p+f)e'}{B}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad e)$$

und zwar auf die erste oder zweite, je nachdem

$$\frac{1}{q} + \frac{(p+f)e''}{B} \gtrless -\frac{1}{q} + \frac{(p+f)e'}{B}$$

oder

$$e' - e'' \lessgtr \frac{2B}{(p+f)q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f)$$

ist. Um die Ausbiegung $BD = f$ des obern Endpunktes der elastischen Linie zu finden, sei ξ die Abscisse des beliebigen Punktes O derselben, dessen Ordinate NO bezogen auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen $A\Xi$, AH bereits oben mit η bezeichnet wurde; sei ferner ϱ ihr Krümmungsradius im Punkte O, λ_0 die specifische Ausdehnung, welche in allen Punkten der Biegungsaxe OY des Querschnitts YOZ stattfindet, so ist nach §. 7, c) die specifische Spannung σ_x dieses Querschnitts im Abstande z von der Biegungsaxe:

$$\sigma_x = E\left[\lambda_0 - (1+\lambda_0)\frac{z}{\varrho}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad g),$$

indem man nämlich nur den dort nach der convexen Seite positiv gesetzten mit η bezeichneten Abstand durch $-z$ zu ersetzen braucht, während die dem Ausdrucke g) zu Grunde liegende Voraussetzung, dass nämlich die materiell gedachten Querschnitte des Körpers bei dessen Biegung auf der elastischen Linie senkrechte Ebenen bleiben, hier mit grösserm Rechte zulässig ist, als dort. Man findet nun eine Relation zwischen ϱ und η und dadurch eine charakteristische Differenzialgleichung der elastischen Linie, indem man in der fünften der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen a) in §. 22 für σ_x seinen obigen Ausdruck g) und $M_y = -P(p+f-\eta)$ setzt. Das giebt, weil

$$\int dq \cdot z = 0, \quad \int dq \cdot z^2 = B$$

ist,

$$(1+\lambda_0)\frac{EB}{\varrho} = P(p+f-\eta)$$

oder wegen der Kleinheit von λ_0, und wenn näherungsweise

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

gesetzt wird (siehe §. 8),

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{P}{EB}(p+f-\eta).$$

Die Integration dieser Gleichung liefert mit Rücksicht darauf, dass

$$\xi = 0, \quad \eta = 0; \quad \xi = 0, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

zusammengehörige Werthe sind, gerade so wie in §. 18 die dortige Gleichung c) aus a) erhalten wurde:

$$\eta = (p + f)\left[1 - \cos\left(\xi\sqrt{\frac{P}{EB}}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{h)}$$

als Gleichung der elastischen Linie, welche aber noch mit der Unbekannten f behaftet ist. Schliesslich ist letztere hier dadurch bestimmt, dass die zusammengehörigen Werthe: $\xi = l$, $\eta = f$ in die Gleichung h) passen müssen; also ist

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{B}{EB}}\right) = 1 - \frac{f}{p+f} = \frac{p}{p+f}$$

oder

$$p + f = \frac{p}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{i).}$$

Die Gleichung der elastischen Linie wird folglich:

$$\frac{\eta}{p} = \frac{1 - \cos\left(\xi\sqrt{\frac{P}{EB}}\right)}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{k)}$$

und die Gleichungen e) verwandeln sich in die oben referirten Formeln 7) und 8).

In dem Grenzfalle, wo $p = 0$ ist, wird:

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EB}}\right) = 1 - \frac{f}{f} = 0$$

und die Formeln 7) und 8) werden unbestimmt, nämlich:

$$k = P\left(\frac{1}{q} + \frac{0}{0}\right); \quad k = P\left(-\frac{1}{q} + \frac{0}{0}\right),$$

sodass dieser Fall in der That die besondere Untersuchung erforderte, welche ihm in §. 18 gewidmet worden ist.

Entsprechend den im §. 19 untersuchten verschiedenen Unterstützungsarten und somit auch verschiedenen Wirkungsweisen einer centrisch belasteten Standsäule können wir auch hier bei excentrischer Belastung ausser dem bisherigen noch insbesondere die folgenden durch *Fig.* 37 angedeuteten drei Fälle unterscheiden. In allen kommt es zunächst darauf an, die horizontale Kraft R zu bestimmen, durch welche die Stütze B [*Fig.* 37, a) und b)], oder die Kraft R nebst dem Kräftepaar Sl, wodurch die Befestigung [*Fig.* 37, c)] des obern Endes B ersetzt werden kann; hiernach bietet die Prüfung der Widerstandsfähigkeit, welche für jeden der beiden durch den Arm CD getrennten Theile AC und CB besonders vorgenommen werden muss, keine Schwierig-

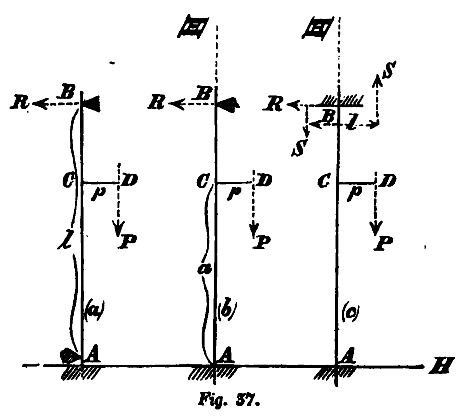


Fig. 37.

keit dar, indem sie auch, wie im Vorhergehenden, nach der Formel 4) in §. 23 geschehen kann, wenn nur die gewöhnlich untergeordneten Verschiebungen der Querschnitte vernachlässigt werden. Die Berücksichtigung der letztern würde zudem die Untersuchung der Fälle *Fig.* 37, b) und c) insofern noch mehr auf eine für die technischen Anwendungen unangemessene Weise erschweren, als man schon bei Bestimmung der Kraft R und des Paares Sl darauf Rücksicht nehmen müsste.

Ruht die Säule unten auf einer horizontalen Ebene (z. B. einer Spurplatte), während sie sich gleichzeitig unten wie oben gegen seitliche Hindernisse (z. B. Zapfenlager) stützt [*Fig.* 37, a)], so ist offenbar, wenn l die Höhe AB bedeutet,

$$R = \frac{p}{l} \cdot P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{l}),$$

in welcher Höhe der Arm CD auch angebracht sein mag.

Ist die Säule unten eingeklemmt, oben gegen eine Stütze gelehnt [*Fig.* 37, b)], so hat man wegen der Gleichheit des auf die Biegungsaxe bezogenen Spannungsmoments eines beliebigen Querschnitts und des resultirenden Moments der äussern Kräfte, welche von ihm bis zum freien Ende B auf die Säule wirken, die folgenden Differenzialgleichungen der Strecken AC und CB der elastischen Linie:

$$EB \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = Pp - R(l - \xi)$$

$$EB \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = - R(l - \xi).$$

Für das auf die Biegungsaxe bezogene Moment der in den Elementen eines Querschnitts stattfindenden Normalspannungen ist nämlich zuvor der Ausdruck

$$(1 + \lambda_0') \frac{EB}{\varrho}$$

gefunden worden, welcher näherungsweise

$$= \frac{EB}{\varrho} = \pm EB \frac{d^2 \eta}{d \xi^2}$$

gesetzt werden kann; und in den obigen Gleichungen sind die Kraftmomente auf den rechten Seiten positiv oder negativ gesetzt, je nachdem sie für sich allein die Säule so zu biegen streben, dass sie ihre concave Seite der positiven oder negativen Axe der η zuwendet, entsprechend einem positiven oder negativen Werthe von $\frac{d^2 \eta}{d \xi^2}$. Wenn man jene Gleichungen integrirt und dabei berücksichtigt, dass für $\xi = 0$ die erste $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ und $\eta = 0$ geben muss, und dass für $\xi = AC = a$ der zweiten dieselben Werthe von $\frac{d\eta}{d\xi}$ und η entsprechen müssen wie der ersten, und wenn man endlich in der so erhaltenen Gleichung der Strecke CB der elastischen Linie die nach den Voraussetzungen der Aufgabe zusammengehörigen Werthe: $\xi = l$, $\eta = 0$ einsetzt, so findet man:

$$R = \frac{3pa(2l - a)}{2l^3} \cdot P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{m}).$$

Ist endlich die Säule unten und oben eingeklemmt [*Fig.* 37, c)], so ergeben sich durch die Integration der Differenzialgleichungen

$$EB\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = Pp - R(l - \xi) - Sl$$

$$EB\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = - R(l - \xi) - Sl$$

der beiden Theile AC und CB der elastischen Linie, und dadurch, dass man alsdann in dem ersten Integral der letztern Gleichung die zusammengehörigen Werthe: $\xi = l$, $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, in dem zweiten Integral die Werthe: $\xi = l$, $\eta = 0$ einsetzt, zwei Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten R und Sl. Man findet daraus:

$$R = \frac{bpa\,(l - a)}{l^3} \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots \quad n)$$

$$Sl = \frac{a\,(3a - 2l)}{l^2} \cdot Pp \quad \ldots\ldots\ldots \quad o).$$

Wenn $a = \frac{2}{3}\,l$ ist, so wird $Sl = 0$, und die Werthe von R aus m) und n) werden gleich. Dann entsprechen also den beiden Unterstützungsarten *Fig.* 37, b) und c) gleiche Tragfähigkeiten.

Das eigene Gewicht der Säule ist in allen Fällen dieses Paragraphen ausser Betracht geblieben. Es würde jedoch bei verticaler Stellung leicht sein, dasselbe mit in Rechnung zu bringen, indem es nur auf das Glied: $\frac{P_x}{q}$ der Formel 4) in §. 23 Einfluss hat.

1833. Navier *Rés. des leçons sur l'appl. de la méc. etc.* Deutsch v. Westphal u. d. T.: „Mech. der Baukunst." 1851. p. 202*.
1845. A. F. W. Brix Verh. d. Gew.-Ver. i. Pr.*.
1850. J. Weisbach Ing. u. Masch. Mechanik. I. p. 302 u. 306*.

§. 27. Prismatischer Körper, welcher gleichzeitig gebogen und verdreht wird.

Einen wichtigen und häufig vorkommenden Fall zusammengesetzter Festigkeit zeigt auch ein gerader prismatischer Körper, welcher sich unter der Einwirkung von Kräften befindet, die senkrecht und alle oder zum Theil windschief gegen seine Axe wirken. Hierher gehören namentlich die mit Rädern, Riemscheiben, Krummzapfen u. s. w. versehenen rotirenden Wellen, welche wesentliche Theile fast aller Maschinen ausmachen. Die Berechnung der erforderlichen Stärke eines solchen Körpers geschieht gewöhnlich so, dass man die Biegung und die Verdrehung, denen er gleichzeitig unterworfen ist, jede für sich betrachtet, jeder dieser beiden einfachen Wirkungsweisen der Elasticität und Festigkeit gemäss nach bekannten Regeln die gesuchte Dimension berechnet, und den grössern der gefundenen Werthe als auch für den zusammengesetzten Fall ausreichend annimmt. Ersetzt man nämlich jede Kraft durch eine gleiche und gleich gerichtete, die Axe schneidende Kraft und durch ein Paar, dessen Ebene auf der Axe senkrecht ist, so verursachen die Kräfte lediglich die

Biegung, die Paare lediglich die Torsion des Körpers (siehe §. 20, p. 102). Die Mangelhaftigkeit dieses Verfahrens liegt aber auf der Hand, indem diejenigen Ausdehnungen, welche durch die Biegung, und diejenigen, welche durch die Torsion bedingt werden, keineswegs gesondert neben einander bestehen, sondern vielmehr zu resultirenden Ausdehnungen sich zusammensetzen.

Indem wir hier vorzugsweise rotirende Wellen im Auge haben, wollen wir auch zur Vereinfachung der Untersuchung hinsichtlich der Querschnittsform solche Voraussetzungen machen, wie sie sich bei Wellen stets erfüllt finden. Besteht eine solche aus Schmiedeeisen, so pflegt ihr Querschnitt ein Quadrat oder Quadrat mit abgestumpften Ecken (Achteck) zu sein; besteht sie aus Gusseisen, so ist der Querschnitt meistentheils ein Kreis, auch wohl ein Ring (hohle Wellen), oder ein Quadrat, Achteck oder Kreis als Grundform mit diametral gegenüberliegenden gewöhnlich vier Ansätzen (gerippte oder gefederte Wellen); hölzerne Wellen endlich werden so beschlagen, dass der Querschnitt ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl ist. Die genannten Figuren haben das mit einander gemein, dass sie einen Mittelpunkt, d. h. einen so gelegenen Punkt haben, welcher alle hindurch gezogenen Durchmesser halbirt und welcher natürlich zugleich der Schwerpunkt ist, und dass ferner allen diesen Durchmessern gleiche Trägheitsmomente des Querschnitts entsprechen, dass also auch alle mit gleichem Rechte Hauptaxen sind. Demgemäss wird die vorliegendem Fall entsprechende Bedingungsgleichung für die Construction und Belastung des Körpers (der Welle) erhalten, wenn in der Gleichung 3) in §. 23

$$P_x = 0 \quad \text{und} \quad B = C$$

gesetzt wird, wodurch dieselbe nach einer leichten Umformung mit Rücksicht darauf, dass B auch für alle Querschnitte gleich ist, übergeht in:

$$k = \frac{1}{B} \cdot \max.\Big[\pm \frac{3}{8}(-M_z \cdot y + M_y \cdot z) + \\ + \frac{5}{8}\sqrt{(-M_z y + M_y z)^2 + M_x^2(y^2+z^2) + \frac{4B}{q}\cdot M_x(P_z \cdot y - P_y \cdot z) + \frac{4B^2}{q^2}(P_y^2+P_z^2)}\Big] \ldots 1).$$

In der Regel darf $P_y = P_z = 0$ gesetzt, d. h. diejenige für alle Punkte eines Querschnitts gleiche Verschiebung desselben, welche nicht durch die Verdrehung bedingt wird, ausser Acht gelassen werden; dann hat man einfacher:

$$k = \frac{1}{B}\cdot \max.\Big[\pm\frac{3}{8}(-M_z\cdot y + M_y\cdot z) + \frac{5}{8}\sqrt{(-M_z\cdot y + M_y \cdot z)^2 + M_x^2(y^2+z^2)}\Big] \ldots 2).$$

Um die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen 1) und 2) stehenden Maximalwerthe, insofern sie von y und z, d. h. von der Lage des bezüglichen Punktes in irgend einem bestimmten Querschnitt abhängen, bestimmen zu können, muss die Form des Querschnitts vollständig gegeben sein. Ist derselbe ein Quadrat, so findet man die resultirende Ausdehnung, respective Verkürzung in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten am grössten, und zwar ergiebt sich, wenn die Axen OY und OZ in den Diagonalen angenommen werden, wenn ferner

die Länge der halben Diagonale (der grösste Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte) mit e bezeichnet und $\sqrt{P_y^2 + P_z^2} = P$ gesetzt wird, unter der Voraussetzung, dass absolut genommen

$$M_y > M_z$$

ist, aus 1)

$$k = \frac{e}{B} \cdot \max.\left[\pm \frac{3}{8} M_y + \frac{5}{8} \sqrt{M_y^2 + M_x^2 + \frac{4B}{qe}\left(\pm M_x \cdot P_y + \frac{B}{qe} \cdot P^2\right)}\right] \ldots 3),$$

und bei Vernachlässigung von P_y und P_z:

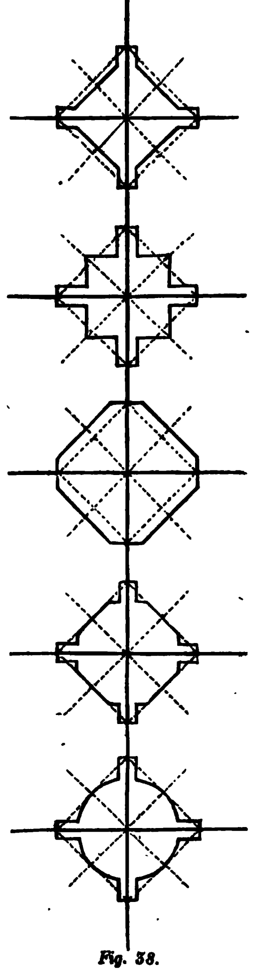
$$k = \frac{e}{B} \cdot \max.\left[\pm \frac{3}{8} M_y + \frac{5}{8} \sqrt{M_y^2 + M_x^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Der Ausdruck in der Klammer ändert sich mit der Lage des Querschnitts, und es muss sein von Grösse, Richtung und Angriffspunkt der belastenden Kräfte abhängiger Maximalwerth in jedem Falle besonders ermittelt werden.

Hat der Querschnitt eine der nebenstehend (*Fig. 38*) gezeichneten Formen, welche alle mit dem Quadrat das gemein haben, dass zwei unter 45° gegen einander verdrehte Paare von auf einander senkrechten Symmetrieaxen vorhanden sind, und dass (abgesehen von geringfügigen Unterschieden) in einem Paare dieser Symmetrieaxen die grössten Durchmesser liegen, so dürfen, falls letztere zu Coordinatenaxen OY und OZ genommen werden und e den halben grössten Durchmesser bedeutet, dieselben Formeln 3) und 4) angewendet werden, versteht sich unter derselben Voraussetzung, dass absolut genommen $M_y > M_z$ ist.

Auch gelten sie für ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl als Querschnitt, falls die Axe OZ in demjenigen von Ecke zu Ecke gehenden Durchmesser angenommen wird, welcher mit der Ebene des partiellen resultirenden Paares $\sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ den kleinsten Winkel bildet.

Ist endlich der Querschnitt ein Kreis oder Ring, sodass er gar keinen ausgezeichneten grössten Durchmesser hat, so muss man, um den Formeln 3) und 4) ihre strenge Gültigkeit zu bewahren, die Ebene XZ in der Ebene des partiellen resultirenden Paares $\sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, dessen Moment wir absolut genommen mit M_q bezeichnen wollen, selbst annehmen. Dann ist $M_z = 0$, $\pm M_y = M_q$; und wenn noch das Moment $\sqrt{M_q^2 + M_x^2}$ des totalen resultirenden Paares mit M bezeichnet wird, so lassen die Gleichungen 3) und 4) zur Andeutung dieses besondern Falles sich folgendermaassen schreiben:


Fig. 38.

$$k = \frac{r}{B} \cdot \max. \left[\frac{3}{8} M_q + \frac{5}{8} \sqrt{M^2 + \frac{4B}{qr}\left(\pm M_x \cdot P_y + \frac{B}{qr} \cdot P^2\right)}\right] \quad . \quad . \quad 5),$$

$$k = \frac{r}{B} \cdot \max. \left[\frac{3}{8} M_q + \frac{5}{8} M\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6),$$

wo r den Radius der den Querschnitt äusserlich begrenzenden Kreisperipherie bedeutet.

Die beiden letzten Formeln gelten übrigens auch für alle rotirende Wellen, wenn unter r der Radius des umbeschriebenen Kreises oder der halbe grösste Durchmesser verstanden wird, den wir oben mit e bezeichnet hatten; denn diese müssen in der ungünstigsten Lage befindlich vorausgesetzt werden, welche sie im Verlauf der Drehung einnehmen können, also in derjenigen, wo ihr grösster Durchmesser von der in Bezug auf jeden einzelnen Querschnitt unveränderlichen Ebene des partiellen resultirenden Paares M_q aufgenommen wird.

Wir haben nur nöthig, die Ableitung der Formeln 3) und 4) aus 1) und 2) nachzuweisen. Wählen wir also die Diagonalen des Quadrats $ABCD$ (*Fig. 39*) als Axen OY und OZ, und beginnen wir mit der Betrachtung der einfachern Formel 2), welche $P_y = P_z = 0$ voraussetzt, so kann man zunächst bemerken, dass das zweite Glied der Grösse unter dem Wurzelzeichen, nämlich

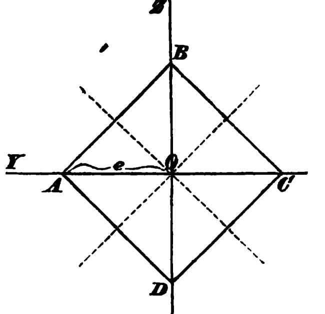


Fig. 39.

$$M_x^2 (y^2 + z^2)$$

in jedem der vier Eckpunkte am grössten und zwar $= M_x^2 \cdot e^2$ ist. Was ferner den Ausdruck

$$- M_z \cdot y + M_y \cdot z$$

betrifft, so ist klar, dass er seinen grössten Absolutwerth in gewissen Punkten des Umfangs haben muss; weil aber zudem die Coordinaten y und z aller Punkte des Umfangs hier durch eine lineare Gleichung mit einander verbunden sind, obiger Ausdruck also in eine lineare Function von y oder z allein verwandelt werden kann, so ist ferner ersichtlich, dass sein grösster Absolutwerth entweder dem grössten Werthe von y oder dem grössten Werthe von z entsprechen, also entweder in den Eckpunkten A und C, oder in B und D stattfinden muss. Im erstern Falle würde er $= \pm M_z \cdot e$, im letztern $= \pm M_y \cdot e$ sein; letzteres ist also sein wirklicher grösster Werth, wenn wir unterstellen, dass absolut genommen $M_y > M_z$ sei. Gewiss hat nun auch der ganze Ausdruck in der Parenthese auf der rechten Seite der Formel 2) in den Punkten B und D sein absolutes Maximum, wodurch die Formel 4) gerechtfertigt ist.

Was ferner die Formel 1) betrifft, so erkennt man ebenso wie zuvor, dass das noch übrige von y und z abhängige Glied des Radikanden, nämlich

$$\frac{4B}{q} \cdot M_x (P_z \cdot y - P_y \cdot z)$$

in einem der vier Eckpunkte positiv und am grössten ist, und zwar, wenn absolut genommen

$$P_y > P_z$$

wäre, in einem der Punkte B und D. Hier wäre dann also gewiss auch der

ganze Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung 1) am grössten, sodass man erhielte:

$$k = \frac{1}{B} \cdot \max.\left[\pm \frac{3}{8} M_y \cdot e + \frac{5}{8}\sqrt{M_y^2 \cdot e^2 + M_x^2 \cdot e^2 + \frac{4B}{q} \cdot M_x \cdot (\pm P_y \cdot e) + \frac{4B^2}{q^2} \cdot P^2}\right],$$

woraus sofort die Formel 3) hervorgeht. Wäre dagegen absolut genommen $P_z > P_y$, was sogar meistentheils der Fall sein wird (wenn $M_y > M_z$), so würde zwar das Glied, um welches es sich hier handelt, in einem der beiden andern Eckpunkte A und C positiv und am grössten und deshalb zur Bestimmung des Maximalwerths des ganzen Ausdrucks in Gleichung 1) streng genommen eine besondere Untersuchung erforderlich sein; man darf sich jedoch derselben überheben und in allen Fällen mit der Formel 3) rechnen, weil jenes Glied überhaupt nur eine untergeordnete Bedeutung hat.

Beispiel. Eine zur Uebertragung einer rotirenden Bewegung dienende horizontale Welle AB (*Fig. 40*) von 2,5 Meter Länge trage zwei Räder in den Abständen $AC = 1$ Meter und $BD = 0,5$ Meter von den Enden. Das Rad C habe einen Theilrisshalbmesser $= 0,75$ Meter und ein Gewicht $= 700$ Kilogramme, das Rad D einen Theilrisshalbmesser $= 1,5$ Meter und ein Gewicht $= 1300$ Kilogramme. Ersteres greife in ein darüber befindliches, sodass der im Theilriss übertragene Druck horizontal und zwar wie der beigezeichnete Pfeil gerichtet ist, insofern er auf das Rad C ausgeübt wird; das Rad D stehe mit einem daneben befindlichen im Eingriff, sodass der übertragene Druck vertical und zwar abwärts gerichtet ist, insofern er von dem andern auf das Rad D ausgeübt wird. Die Welle bestehe aus Gusseisen und habe einen kreisförmigen Querschnitt. Es soll ihre erforderliche Stärke der Bedingung gemäss berechnet werden, dass durch sie ein Kraftmoment $= 1200$ Kilogrammeter, wobei also der horizontale Druck im Theilriss des Rades $C = 1600$ Kilogramme, der verticale Druck im Theilriss von $D = 800$ Kilogramme ist, mit Sicherheit übertragen werden könne.

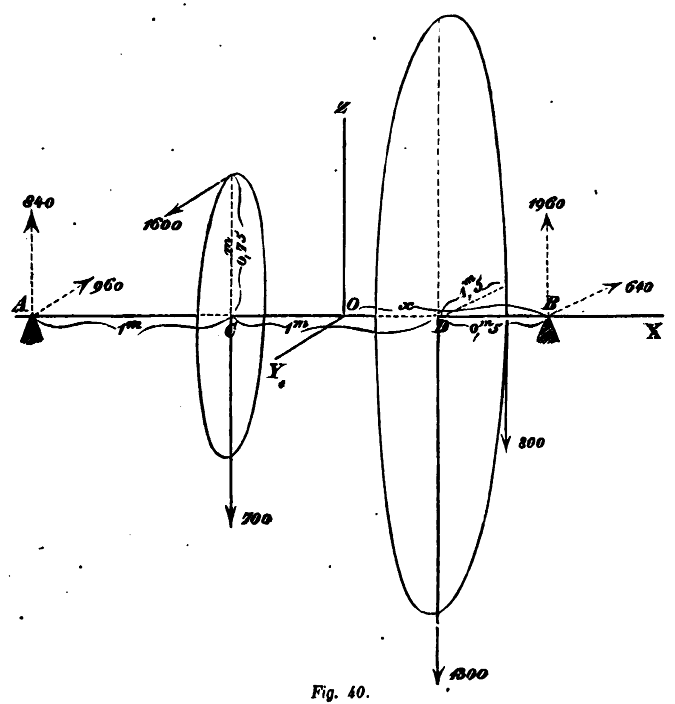


Fig. 40.

Für irgend einen Punkt O der Wellenaxe als Anfangspunkt werde die Coordinatenaxe OX in der Richtung AB, OY horizontal und nach der Richtung der am Umfange des Rades C wirksamen Kraft, OZ vertical aufwärts gerichtet angenommen. Demnächst mögen die Zapfenlager bei A und B durch äquivalente, d. h. solche Kräfte

ersetzt werden, welche den auf sie ausgeübten Pressungen gleich und entgegengesetzt sind; also das Lager B durch die verticale Kraft

$$\frac{700 + (1300 + 800)\,2}{2{,}5} = 1960 \text{ Kilogramme}$$

nach der Richtung OZ, und durch die horizontale Kraft

$$\frac{1600}{2{,}5} = 640 \text{ Kilogramme}$$

nach der Richtung YO, das Lager A durch die verticale Kraft

$$700 + 1300 + 800 - 1960 = 840 \text{ Kilogramme}$$

nach der Richtung OZ, und durch die horizontale

$$1600 - 640 = 960 \text{ Kilogramme}$$

nach der Richtung YO. Damit uns zugleich das vorliegende Beispiel eine Vergleichung zwischen den Resultaten der nach den gewöhnlichen Methoden und der nach obigen Formeln der zusammengesetzten Festigkeit durchgeführten Rechnung liefere, wollen wir den erforderlichen Radius r der Welle zunächst nach den Principien des dritten Abschnitts dieses Kapitels bei blosser Berücksichtigung der in der Wellenaxe angreifenden Kräfte, indem wir die an den Umfängen der Räder wirksamen Drucke an deren Mittelpunkte C und D versetzen und die dabei hervorgehenden entgegengesetzt drehenden Paare $= 1200$ Kilogrammeter ausser Acht lassen, berechnen; demnächst bei alleiniger Berücksichtigung dieser Kräftepaare, welche den Theil CD der Welle auf Torsion in Anspruch nehmen, nach den Principien des sechsten Abschnitts; endlich bei gleichzeitiger Rücksichtnahme auf diese beiderlei Einflüsse.

Die Berechnung rücksichtlich der relativen Festigkeit allein hat nach der obigen Formel 6) zu geschehen, nachdem darin $M_x = 0$, also $M = \sqrt{M_q^2 + M_x^2} = M_q$ gesetzt worden ist; dadurch wird

$$k = \frac{r}{B} \cdot \max. M_q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{a)}$$

in Uebereinstimmung mit §. 7, Gleichung 3). Was den Maximalwerth von $M_q = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ betrifft, so ist zunächst offenbar, dass derjenige Punkt O der Axe, welchem er entspricht, d. i. der Bruchpunkt, nicht ausserhalb der Strecke CD liegen kann, indem von A bis C und von B bis D das resultirende Kraftmoment beständig zunimmt. Denken wir also den Punkt O, wie in *Fig. 40*, irgendwo in der Strecke CD angenommen und bezeichnen seinen Abstand von B mit x, so ist, wenn nunmehr sämmtliche Längen in Centimetern ausgedrückt werden,

$$M_y = 2100\,(x - 50) - 1960\,x = 140\,x - 105000$$
$$M_z = -\,640\,x$$

also

$$M_q = \sqrt{(140x - 105000)^2 + (640\,x)^2} = 10\sqrt{(14\,x - 10500)^2 + (64\,x)^2}.$$

Dieser Ausdruck, in seiner analytischen Allgemeinheit aufgefasst, hat kein Maximum und nur ein Minimum, entsprechend demjenigen x, durch welches die Ableitung des Radikanden $= 0$, also die Gleichung

$$(14\,x - 10500)\,14 + (64)^2\,x = 0$$

erfüllt wird, d. i.

$$x = 34,2 \ldots$$

Weil dieser Werth von $x < 50$ ist, so folgt, dass M_q von D bis C beständig wächst, dass also C der Bruchpunkt und ihm entsprechend

$$\text{max. } M_q = 100 \sqrt{840^2 + 960^2} = 127562$$

Kilogramm-Centimeter ist. Da nun ferner

$$\frac{B}{r}\left(= \frac{I}{e} \text{ auf S. 28}\right) = \frac{\pi r^3}{4}$$

ist, so geht die Gleichung a), wenn $k = 500$ gesetzt wird (p. 32), über in:

$$500 = \frac{127562}{\frac{\pi r^3}{4}},$$

woraus

$$r = 6,874 \text{ Centimeter}$$

sich ergiebt.

Um ferner die Welle mit Rücksicht auf Torsion allein zu berechnen, hat man in obiger Formel 6) $M_q = 0$, also $M = M_x$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$k = \frac{r}{B} \cdot \frac{5}{8} M_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{b)}$$

in Uebereinstimmung mit §. 20, Gleichung 2), wenn man $\frac{4}{5} k = t$ setzt und beachtet, dass $2B = O$ ist. Die Einsetzung der Werthe liefert:

$$500 = \frac{5}{8} \frac{120000}{\frac{\pi r^3}{4}}$$

folglich

$$r = 5,759 \text{ Centimeter.}$$

Um endlich die Rechnung mit Rücksicht auf zusammengesetzte Festigkeit, und zwar zunächst mit Vernachlässigung der Kräftesummen P_y, P_z, also nach der vollständigen Formel 6) anzustellen, hat man zu bemerken, dass, da sowohl M_q, als auch $M = \sqrt{M_q^2 + M_x^2}$ für den Punkt C am grössten, dieser Punkt auch hier der Bruchpunkt ist. Ihm entsprechend hat man:

$$M = \sqrt{127562^2 + 120000^2} = 175130,$$

also

$$500 = \frac{1}{8 \cdot \frac{\pi r^3}{4}} (3 \cdot 127562 + 5 \cdot 175130) = \frac{629168}{\pi r^3},$$

woraus

$$r = 7,371 \text{ Centimeter}$$

sich ergiebt.

Will man auch auf die Kräfte P_y und P_z, welche ausser der mit der Torsion verbundenen noch eine besondere für alle Punkte eines Querschnitts gleiche Verschiebung desselben verursachen, Rücksicht nehmen, also nach der Formel 5) rechnen, so kann man zwar nicht ohne Weiteres behaupten, dass auch jetzt noch dem Orte C des Punktes O das Maximum der rechten Seite der Gleichung 5) entsprechen, dass also auch jetzt noch C der Bruchpunkt bleiben wird; indessen darf man in der Gewissheit, dass der dadurch vielleicht begangene Fehler nur unwesentlich sein kann, der darauf gerichteten Untersuchung sich überheben und den Punkt C als Bruchpunkt beibehalten. Zu berücksichtigen ist aber, dass die Formel 5) eine solche Lage der Axen OY, OZ voraussetzt, bei welcher letztere in die Ebene des Paares M_q fällt; demgemäss ist in Beziehung auf den Punkt C

$$P_y = 0, \quad P = \sqrt{840^2 + 960^2} = 1275{,}62$$

zu setzen, wodurch man, da

$$\frac{B}{qr} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2 \cdot r} = \frac{r}{4}$$

ist, erhält:

$$500 = \frac{1}{8 \cdot \frac{\pi r^3}{4}} \left[3 \cdot 127562 + 5 \sqrt{175130^2 + \left(\frac{r}{2} \cdot 1275{,}62\right)^2} \right].$$

Setzt man hier für das in der Wurzelgrösse vorkommende r den zuletzt gefundenen Näherungswerth:

$$r = 7{,}371,$$

so ergiebt sich

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 127562 + 5\sqrt{175130^2 + (3{,}686 \cdot 1275{,}62)^2}}{1000 \cdot \pi}} = 7{,}372.$$

Man sieht, dass die grössere Mühe und Zeit, welche die Benutzung der Formel 5) beansprucht, durch die erzielte grössere Genauigkeit nicht aufgewogen wird. Es wird um so weniger der Fall sein, je länger die Welle ist.

Einen etwas grössern Einfluss hat noch gewöhnlich das bisher vernachlässigte Gewicht der Welle, und zwar ist dieser bei einer längern Welle grösser als bei einer kürzern. Nimmt man bei vorliegendem Beispiele das specifische Gewicht des Gusseisens = 7,2 und den Radius des Querschnitts = 7,371, so findet man das Gewicht = 308 Kilogramme, wovon auf jedes Lager die Hälfte kommt, sodass statt der Verticalkraft = 840 Kilogramme bei A die etwas grössere:

$$840 + 154 = 994 \text{ Kilogramme}$$

gesetzt werden muss. Hiernach ist in Beziehung auf den Punkt C mit Berücksichtigung der entgegengesetzt gerichteten Schwere = 124 Kilogramme des Wellenstücks AC:

$$M_q = \sqrt{(994 \cdot 100 - 124 \cdot 50)^2 + (960 \cdot 100)^2} = 133799$$

$$M = \sqrt{133799^2 + 120000^2} = 179728;$$

mithin wird die Formel 6):

$$500 = \frac{1}{8 \cdot \frac{\pi r^3}{4}} \cdot (3 \cdot 133799 + 5 \cdot 179728),$$

woraus man

$$r = 7{,}452 \text{ Centimeter}$$

findet. Indessen ist auch dieser Einfluss des eigenen Gewichts nicht so gross, dass es nicht in den meisten Fällen genügend wäre, den nach der Formel 6) ohne Rücksicht auf das Wellengewicht berechneten Werth nach Schätzung abzurunden, indem man ihn etwas vergrössert. Im vorliegenden Fall würde man $r = 7{,}5$ haben nehmen können, nachdem man den Näherungswerth 7,371 gefunden hatte. Jene Formel 6) aber ist zugleich sicherer und nicht weniger bequem in der Anwendung, als wenn man die Welle auf relative und Torsionsfestigkeit besonders berechnet und beide Resultate vergleicht, wie es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

WEISBACH giebt zur Berechnung der Radwellen auf zusammengesetzte Festigkeit eine Formel an, welche nach der Uebertragung in unsere Bezeichnungsweise so aussieht:

$$k = \frac{2}{E}\left(\frac{M_x \cdot e}{O}\right)^2 + \frac{\max. M_q \cdot e_1}{B}.$$

Es bedeutet hier E den Elasticitätsmodulus, O das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts (§. 20), e den grössten Abstand eines Punktes desselben vom Schwerpunkt, B das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe (den auf der Ebene des grössten Kraftmoments M_q senkrechten Durchmesser) des Querschnitts, $e_{,}$ den grössten Abstand eines Punktes desselben von jener Axe. Es werden hier im Allgemeinen die in zwei verschiedenen Punkten stattfindenden Ausdehnungen zu einer resultirenden Ausdehnung zusammengesetzt, was im Princip nicht zu rechtfertigen ist und auch das Resultat unter Umständen wesentlich fehlerhaft machen kann. Aber wenn wir auch, wie es bei rotirenden Wellen, deren Querschnitt wir als reguläre Figur annehmen und wo wir demnach $O = 2B$ setzen, doch jedenfalls geschehen müsste, $e_{,} = e$ und damit die durch die beiden Glieder der rechten Seite obiger Gleichung gemessenen Spannungen als in demselben Punkte stattfindend voraussetzen, so würde

$$k = \frac{e}{B}\left(\max. M_q + \frac{e}{2EB} \cdot M_x^2\right),$$

also eine Formel erhalten werden, die von der obigen mit 6) bezeichneten sehr wesentlich abweicht. Der Grund ist der, dass der WEISBACH'schen Formel eine ohne Zweifel unhaltbare Theorie der Torsionsfestigkeit zum Grunde liegt, bei welcher der prismatische Körper aus Fasern bestehend gedacht wird, welche mit seiner Axe parallel laufen, und die Ausdehnungen, welche diese Fasern bei ihrer mit der Torsion verbundenen spiralförmigen Windung erfahren, als die einzigen angenommen werden, welche überhaupt in Betracht zu ziehen sind, sodass die grösste specifische Ausdehnung einer solchen Faser $= \frac{k}{E}$ gesetzt werden muss, um die Bedingungsgleichung für die dem Erfahrungscoefficienten k entsprechende Anordnung des Körpers zu erhalten. Ausserdem wird stillschweigend vorausgesetzt, dass in einer gewissen Richtung niemals eine Ausdehnung ohne entsprechende Spannung stattfinden könne, und demgemäss in einer solchen Faser an irgend einer Stelle eine absolute Spannung angenommen, welche erhalten wird durch Multiplication

der in dem bezüglichen Faserquerschnitt stattfindenden Tangentialspannung (bei WEISBACH Torsionskraft der Faser genannt) mit dem Cosinus des fast rechten Neigungswinkels der Faser gegen den Körperquerschnitt. Die Widerlegung dieser Anschauungen ist in dem enthalten, was in den §§. 17, 20 und 21 vorgetragen worden ist.

1848. *PONCELET Lehrb. d. Anw. d. Mech. auf Maschinen. Deutsch von SCHNUSE. II. §. 224*.
1850. WEISBACH Lehrb. d. Ing. u. Masch.-Mech. I. §. 225*. 2te Aufl.

§. 28. Berechnung eines Hakens.

Um schliesslich noch ein praktisch interessantes Beispiel für die Berechnung eines nicht prismatischen Körpers rücksichtlich auf zusammengesetzte Festigkeit hier anzuführen, wollen wir einen **Haken** betrachten, wie er vielfach zur Verbindung von Seilen, Ketten u. s. w. mit andern Körpern, z. B. mit Lasten, welche gehoben werden sollen, gebraucht wird. Wenn freilich auch zugegeben werden muss, dass die Rechnung nicht einfach genug ist, um sich für die praktische Anwendung empfehlen zu lassen, so mag sie als Beispiel solcher nicht seltener Fälle dienen, in denen es angemessener erscheint, sich lediglich auf die in eine empirische Formel einzukleidende praktische Erfahrung zu stützen, als auf eine mangelhafte Theorie.

Die Mittellinie (§. 22) eines solchen Hakens ist eine ebene Curve, deren Ebene denselben symmetrisch theilt; die *Fig. 41* (siehe S. 166) stelle seinen Durchschnitt mit dieser Ebene vor. Indem wir die innere Begrenzungslinie DAE dieses Durchschnitts als eine Kreislinie vom Radius r, sämmtliche Querschnitte des Hakens als unter sich ähnliche und gegen die Symmetrieebene gleich liegende Figuren von gegebener Form voraussetzen, indem wir ferner annehmen, dass die belastende Kraft P in einem Punkte D der gedachten Kreislinie in der Richtung des Radius CD angreife (welche Voraussetzungen bei einer guten Ausführung sämmtlich sich erfüllt zu finden pflegen), stellen wir uns die Aufgabe, **die äussere Begrenzungslinie des Durchschnitts mit der Symmetrieebene der Bedingung gemäss zu bestimmen, dass die grösste specifische Ausdehnung in allen Querschnitten denselben gegebenen Werth** $\frac{k}{E}$ hat. Dadurch werden mit Rücksicht auf die gegebene gleiche Form aller Querschnitte ihre absoluten Dimensionen vollkommen bestimmt sein.

Wollte man den Begriff der Querschnitte hier genau so auffassen, wie es in §. 22 erklärt wurde und allerdings am angemessensten wäre, sie nämlich betrachten als ein System von Durchschnitten, die senkrecht stehen auf der ihre Schwerpunkte stetig verbindenden Linie (der Mittellinie), so würde man bei der versuchten Lösung der Aufgabe auf kaum zu überwindende Schwierigkeiten stossen. Wir sehen uns daher zu einer das Resultat jedenfalls nur unwesentlich berührenden, die Untersuchung aber wesentlich vereinfachenden Abweichung von unseren bisherigen Annahmen genöthigt, darin bestehend, dass wir die Querschnitte als senkrecht zu der Kreislinie DAE voraussetzen, und den geometrischen Ort der Schwerpunkte der so verstandenen Querschnitte als die Mittellinie gelten lassen, in welcher die Anfangspunkte O der den Formeln der §§. 22 und 23 zum Grunde liegenden Coordinatenaxen anzunehmen sind, und zwar die Axen

OY, OZ in den dem Schwerpunkt O entsprechenden Trägheits-Hauptaxen des bezüglichen Querschnitts, die Axe OX senkrecht dazu, letztere hier also im Allgemeinen nicht tangential an die Mittellinie.

Die Durchschnittslinie AB der Symmetrieebene mit einem beliebigen Querschnitt geht verlängert durch den Mittelpunkt C des Kreises DAE; als Symmetrieaxe des Querschnitts ist sie Hauptaxe desselben für jeden ihrer Punkte, insbesondere also auch für den Punkt O. Wird nun die Coordinatenaxe OZ in der Richtung OC angenommen, der Winkel DCA mit φ, der Abstand OA des Schwerpunktes O von der Kreislinie DAE mit a bezeichnet, bedeutet ferner wie bisher q den Flächeninhalt des Querschnitts, B sein Trägheitsmoment bezogen auf die Axe OY, und wird endlich in Gemässheit der vorausgesetzten Aehnlichkeit aller Querschnitte

$$a = \alpha x; \quad B = \beta x^4; \quad q = \gamma x^2$$

gesetzt, unter x ihren veränderlichen (von φ abhängigen) Durchmesser AB, in der Symmetrieebene gemessen, und unter α, β, γ constante, durch ihre Form bestimmte Coefficienten verstanden, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichung 3) in §. 23 die folgende den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Gleichung zwischen x und φ:

$$x^6 - \frac{3P}{4k}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\sin\varphi \cdot x^4 - \frac{3P}{4k}\cdot\frac{\alpha r}{\beta}\sin\varphi\cdot x^3 -$$

$$- \frac{P^2}{16k^2}\left[4\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2\cdot\sin^2\varphi + 25\,\frac{\cos^2\varphi}{\gamma^2}\right]x^2 -$$

$$- \frac{P^2}{2k^2}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\frac{\alpha r}{\beta}\sin^2\varphi\cdot x - \frac{P^2}{4k^2}\frac{\alpha^2 r^2}{\beta^2}\sin^2\varphi = 0 \quad . \; . \quad 1),$$

wobei vorausgesetzt ist, dass, wie es bei den praktischen Ausführungen der Fall zu sein pflegt, für jedes x

$$1 - 2\alpha \leqq \frac{2\beta x}{\gamma(r + \alpha x)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

ist. Hierdurch ist x als Function von φ, somit auch die äussere Begrenzungslinie des Durchschnitts des Hakens mit seiner Symmetrieebene bestimmt.

Es ist üblich und bequem in der Anwendung, die gegebenen oder zu bestimmenden Dimensionen eines Maschinen- oder Bauconstructionstheiles überhaupt mit einer gewissen einfach bestimmbaren Grunddimension in Verhältniss zu setzen. Vergleichen wir hier den Durchmesser x des Hakens mit dem Durchmesser d, welchen bei gleicher Sicherheit eine aus demselben Material bestehende kreisförmig-cylindrische Stange haben muss, wenn sie durch die Kraft P auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird, wo also d bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{P}{k} = \frac{\pi d^2}{4},$$

und setzen wir

$$x = y\cdot d, \quad r = \varrho\cdot d,$$

ferner zur Vereinfachung

$$2\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\alpha^2}{\beta}\right)=f;\quad \frac{\alpha}{\beta}=g;\quad \frac{5}{\gamma}=h,$$

so geht die Gleichung 1) über in:

$$y^6-\frac{3\pi}{32}f\sin\varphi\cdot y^4-\frac{3\pi\varrho}{16}\cdot g\sin\varphi\cdot y^3-\left(\frac{\pi}{16}\right)^2(f^2\sin^2\varphi+h^2\cos^2\varphi)\,y^2-$$

$$-\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\varrho\cdot fg\sin^2\varphi\cdot y-\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\varrho^2\cdot g^2\sin^2\varphi=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad 3)$$

oder endlich, wenn wie üblich

$$\varrho=\frac{5}{6}$$

ist, in:

$$y^6-0{,}2945\,f\sin\varphi\cdot y^4-0{,}4909\,g\sin\varphi\cdot y^3-0{,}0386\,(f^2\sin^2\varphi+$$

$$+h^2\cos^2\varphi)\,y^2-0{,}1286\,fg\sin^2\varphi\cdot y-0{,}1072\,g^2\sin^2\varphi=0\ldots 4).$$

Ein kleinerer Werth von ϱ ist vortheilhaft, insofern er geringere Dimensionen des Hakens erlaubt; durch die Rücksicht auf die freie Beweglichkeit des einzuhängenden Ringes wird jedoch eine Grenze gesetzt, welche $=\frac{5}{6}$ angenommen werden kann.

Die Gleichung 4) hat stets eine und nur eine positive Wurzel. Zugleich ist ersichtlich, dass diese gleich ist für je zwei Winkel φ, welche sich zu 180° ergänzen, woraus folgt, dass die Ebene des dem Winkel $\varphi=90^\circ$ entsprechenden Querschnitts eine Symmetrieebene des Hakens sein müsste. In Bezug auf den oberen Theil ($\varphi=90^\circ$ bis $\varphi=180^\circ$) wird jedoch durch die Rücksicht auf einen passenden allmäligen Uebergang in den andern Bedingungen unterworfenen geraden cylindrischen Theil des Hakens eine Abweichung bedingt. Es ist zu empfehlen, die Anordnung stets so zu treffen, dass die Mittellinie EF dieses cylindrischen Theils mit der Richtungslinie von P in eine gerade Linie falle, sodass derselbe blos auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird und demnach sein Querschnitt nur die Grösse $\frac{P}{k}$ zu haben braucht. — Die Bedingungen für die Gestaltung der Spitze DG des Hakens sind nicht der Art, dass sie sich mathematisch formuliren liessen. Es dient dieselbe dazu, das Herausspringen des eingehängten Ringes bei nachlassender Zugkraft zu verhindern, sowie auch einem zufälligen seitlichen Druck genügenden Widerstand zu leisten.

Die äussere Begrenzungslinie des Hakendurchschnitts mit seiner Symmetrieebene kann mit hinlänglicher Genauigkeit aus freier Hand gezeichnet werden, wenn nur die den Winkeln $\varphi=0^\circ$, 30° und 90° entsprechenden Werthe von x berechnet und aufgetragen worden sind. Man erhält aber aus Gleichung 4) für $\varphi=0^\circ$;

$$\left.\begin{array}{l} y^6 - 0{,}0386\, h^2 y^2 = 0;\ y = 0{,}4433 \sqrt{h}, \\ \text{für } \varphi = 30^\circ: \\ y^6 - 0{,}1472\, f y^4 - 0{,}2454\, g y^3 - 0{,}0096\, (f^2 + 3h^2)\, y^2 - \\ \qquad - 0{,}0321\, f g y - 0{,}0268\, g^2 = 0, \\ \text{für } \varphi = 90^\circ: \\ y^6 - 0{,}2945\, f y^4 - 0{,}4909\, g y^3 - 0{,}0386\, f^2 y^2 - 0{,}1286\, f g y - \\ \qquad - 0{,}1072\, g^2 = 0 \end{array}\right\} \ldots 5).$$

Der mittlere Winkel ist dabei näher bei 0°, als bei 90° gewählt, weil dort die Aenderung von y, also von x schneller geschieht.

Ist der Querschnitt des Hakens ein Kreis, so findet man hieraus:

$$\left.\begin{array}{llll} \varphi = 0^\circ, & y = 1{,}118, & x = 1{,}118 \cdot d \\ \varphi = 30^\circ, & y = 2{,}075, & x = 2{,}075 \cdot d \\ \varphi = 90^\circ, & y = 2{,}725, & x = 2{,}725 \cdot d \end{array}\right\} \ldots\ldots 6).$$

Das Verhältniss dieser drei Durchmesser x ist

$$= 1 : 1{,}856 : 2{,}437.$$

Zur möglichst vollständigen Nutzung der Widerstandsfähigkeit des Materials ist es vortheilhaft, die Querschnittsform so zu wählen, dass die Mittellinie des Hakens seiner concaven Seite etwas näher als der convexen liegt, und in Uebereinstimmung damit die Ungleichheit 2) der Gleichheit sich nähert. Dies kann z. B. durch einen aus zwei halben Ellipsen zusammengesetzten Querschnitt erreicht werden, welche, wie *Fig. 42* zeigt, eine auf der Symmetrieaxe AB des Querschnitts senkrechte Hauptaxe gemeinschaftlich haben, während die andere Hauptaxe für die an der concaven Seite des Hakens gelegene halbe Ellipse kleiner ist, als für die andere. Wird beispielsweise das Verhältniss der letzteren $= 1 : 5$, die gemeinschaftliche auf AB senkrechte Axe $= 0{,}6\, x$ angenommen, so ergeben die Gleichungen 5)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \varphi = 0^\circ, & x = 1{,}444 \cdot d \\ \varphi = 30^\circ, & x = 2{,}41 \cdot d \\ \varphi = 90^\circ, & x = 3{,}135 \cdot d \end{array}\right\} \ldots\ldots 7),$$

das Verhältniss dieser drei Durchmesser x also

$$= 1 : 1{,}669 : 2{,}171.$$

In der Praxis findet man die Dimensionen des Hakens im Verhältniss zu dem Durchmesser d (an der schwächsten Stelle des geraden cylindrischen Theils desselben gemessen) gewöhnlich schwächer ausgeführt, woraus aber nur gefolgert werden kann, dass man hinsichtlich des gekrümmten Theiles mit einer geringeren Sicherheit sich zu begnügen pflegt, während gegen die den vorstehenden Resultaten zum Grunde liegende Theorie wohl kaum ein wesentlicher Einwand wird gemacht werden können.

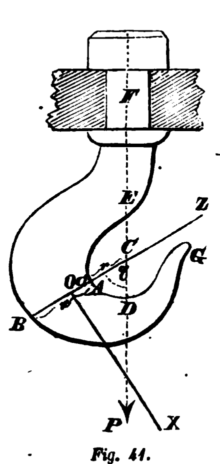


Fig. 41.

Mit Rücksicht auf die oben näher angegebene Lage der Axen OY, OZ und die eingeführten Bezeichnungen hat man hier in der Gleichung 3) in §. 23

$$P_x = P\sin\varphi,\quad P_y = 0,\quad P_z = -P\cos\varphi$$
$$M_x = 0,\quad M_y = P(r+a)\sin\varphi,\quad M_z = 0$$

zu setzen, wodurch dieselbe in folgende durch Gestalt und Belastung des Körpers zu erfüllende Bedingung übergeht:

$$\frac{k}{P} = \max.\left[\pm\frac{3}{8}\left(\frac{1}{q}+\frac{r+a}{B}\cdot z\right)\sin\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{1}{q}+\frac{r+a}{B}\cdot z\right)^2\sin^2\varphi + \frac{4}{q^2}\cdot\cos^2\varphi}\right]\ldots \text{a)}$$

falls es sich nur darum handelt, dass in irgend einem Punkte die Ausdehnung höchstens $= \frac{k}{E}$ sein soll. Insofern der Ausdruck in der Klammer [—] von der Lage des bezüglichen Punktes in einem bestimmten Querschnitt, also von z abhängt, entspricht sein Maximum offenbar einem der beiden Grenzwerthe

$$z = a \quad\text{oder}\quad z = -(x-a)$$

und es fragt sich, welchem, wenn man berücksichtigt, dass das Glied

$$\frac{3}{8}\left(\frac{1}{q}+\frac{r+a}{B}\cdot z\right)\sin\varphi$$

mit demjenigen Vorzeichen genommen werden muss, wodurch es einen positiven Werth erhält, für $z = a$ folglich mit dem Zeichen $+$, für $z = -(x-a)$ dagegen entweder mit dem Zeichen $+$ oder dem Zeichen $-$, je nachdem der Werth des Ausdrucks

$$\frac{1}{q} - \frac{r+a}{B}(x-a)$$

positiv oder negativ ist. Hat dieser Ausdruck einen positiven Werth, so ist nothwendig

$$\frac{1}{q} + \frac{r+a}{B}\cdot a > \frac{1}{q} - \frac{r+a}{B}(x-a).$$

Das Maximum in der Gleichung a) entspricht dann jedenfalls dem Werthe $z = a$, d. h. die Ausdehnung ist im äussersten Punkte A des Querschnitts an der Innenseite des Hakens am grössten. Hat aber der zuvor bemerkte Ausdruck einen negativen Werth, sodass er in der Gleichung a) mit dem Zeichen — zu nehmen ist, so entspricht das Maximum in a) nur dann dem Werthe $z = a$, wenn

$$\frac{1}{q} + \frac{r+a}{B}\cdot a \gtreqless -\frac{1}{q} + \frac{r+a}{B}(x-a)$$

oder

$$x - 2a \leqq \frac{2B}{q(r+a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{b)}$$

ist. Wir wollen annehmen, diese Bedingung fände sich erfüllt. Dann ist die Gleichung a), wenn zudem

$$a = \alpha x, \quad B = \beta x^4, \quad q = \gamma x^2$$

gesetzt wird, wodurch die Bedingung b) die im Obigen angeführte Gestalt 2) annimmt, durch folgende zu ersetzen:

$$\frac{k}{P} = \max. \left[\frac{3}{8}\left(\frac{1}{\gamma x^2} + \frac{\alpha(r + \alpha x)}{\beta x^3}\right)\sin\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma x^2} + \frac{\alpha(r + \alpha x)}{\beta x^3}\right)^2 \sin^2\varphi + \frac{4}{\gamma^2 x^4}\cdot\cos^2\varphi}\right] \quad \ldots . \text{c)}.$$

Fände sich dagegen die Bedingung 2) nicht erfüllt, so hätte man statt dieser Gleichung c) die folgende zu nehmen:

$$\frac{k}{P} = \max. \left[\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{\gamma x^2} + \frac{(1-\alpha)(r + \alpha x)}{\beta x^3}\right)\sin\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{8}\sqrt{\left(-\frac{1}{\gamma x^2} + \frac{(1-\alpha)(r + \alpha x)}{\beta x^3}\right)^2 \sin^2\varphi + \frac{4}{\gamma^2 x^4}\cdot\cos^2\varphi}\right] \quad \ldots . \text{d)}.$$

Es würde dann die Ausdehnung im äussersten Punkte B des Querschnitts an der Aussenseite des Hakens, welche übrigens eine negative Ausdehnung oder Verkürzung ist, grösser sein, als die positive oder eigentliche Ausdehnung im anderen äussersten Punkte A.

Das Maximum in der Gleichung c) hängt jetzt nur noch ab von der Lage des Querschnitts im Körper, d. h. von φ. Es liesse sich nach bekannten Regeln bestimmen, wenn x als Function von φ oder auch nur die Function von φ gegeben wäre, welcher x proportional sein soll, d. h. wenn die Form nebst absoluten Dimensionen oder auch nur die blosse Form des Hakens gegeben wäre. Im ersteren Fall würde die den gegebenen Dimensionen entsprechende zulässige Belastung P, im letzteren die der Belastung P entsprechende massgebende Dimension x jedes Querschnitts dadurch bestimmt sein.

Hier soll aber erst $x = f(\varphi)$ bestimmt werden, und zwar gemäss der Bedingung, dass in jedem Querschnitt bei A die grösste Ausdehnung $= \frac{k}{E}$ ist. Dieser Forderung entspricht die Gleichung:

$$\frac{k}{P} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{\gamma x^2} + \frac{\alpha(r + \alpha x)}{\beta x^3}\right)\sin\varphi + $$
$$+ \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma x^2} + \frac{\alpha(r + \alpha x)}{\beta x^3}\right)^2 \sin^2\varphi + \frac{4}{\gamma^2 x^4}\cos^2\varphi},$$

aus welcher sich durch eine leicht zu bewerkstelligende Umformung die oben mitgetheilte geordnete Gleichung 1) ergiebt. Die fernere Ableitung der Gleichungen 3), 4) und 5) bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Ist der Querschnitt des Hakens ein Kreis, so hat man

$$a = \frac{x}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4, \quad \beta = \frac{\pi}{64}$$

$$q = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad \gamma = \frac{\pi}{4},$$

woraus zuvörderst ersichtlich ist, dass die Voraussetzung 2) für jeden Querschnitt sich erfüllt findet, da die linke Seite $= 0$, die rechte aber stets positiv ist. Ferner ist

$$f = 2\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{\beta}\right) = \frac{40}{\pi}$$

$$g = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{32}{\pi}$$

$$h = \frac{5}{\gamma} = \frac{20}{\pi}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus 5) für $\varphi = 0^\circ$, 30° und 90° die Gleichungen:

$$y = 0{,}4433 \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 1{,}118$$

$$y^6 - 1{,}874 \cdot y^4 - 2{,}5 \cdot y^3 - 2{,}723 \cdot y^2 - 4{,}163 \cdot y - 2{,}781 = 0$$

$$y^6 - 3{,}75 \cdot y^4 - 5y^3 - 6{,}258 \cdot y^2 - 16{,}678 \cdot y - 11{,}122 = 0.$$

Die positiven Wurzeln der beiden letzteren werden durch Näherung bezüglich $= 2{,}075$ und $= 2{,}725$ gefunden. Der Werth $y = 1{,}118$ für $\varphi = 0$ hätte auch ohne Weiteres durch die Erwägung gefunden werden können, dass die höchstens zulässige specifische Tangentialspannung $= \frac{4}{5}$ von der bei fehlender Seitenspannung höchstens zulässigen absoluten Spannung zu setzen ist [§. 17, 3)], dass folglich der Querschnitt bei D im Verhältniss $5 : 4$ grösser sein muss als derjenige bei F, oder

$$x = d\sqrt{\frac{5}{4}} = 1{,}118 \cdot d.$$

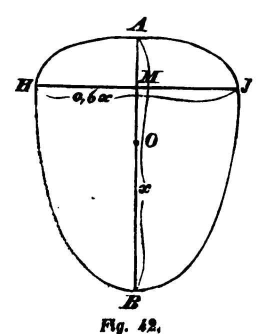


Fig. 42.

Wenn der Querschnitt aus zwei halben Ellipsen zusammengesetzt ist (*Fig.* 42), sodass

$$HJ = 0{,}6 \cdot AB \text{ und } AM : MB = 1 : 5$$

ist, so findet man

$$\alpha = 0{,}4496; \quad \beta = 0{,}031; \quad \gamma = 0{,}4712$$

daraus

$$f = 17{,}297; \quad g = 14{,}503; \quad h = 10{,}6112,$$

und wegen 5) für $\varphi = 0$:

$$y = 0{,}4433 \sqrt{10{,}6112} = 1{,}444$$

für $\varphi = 30^\circ$:

$$y^6 - 2{,}546 \cdot y^4 - 3{,}559 \cdot y^3 - 6{,}114 \cdot y^2 - 8{,}0525 \cdot y - 5{,}637 = 0$$

für $\varphi = 90^0$:

$$y^6 - 5{,}094 \cdot y^4 - 7{,}119 \cdot y^3 - 11{,}548 \cdot y^2 - 32{,}26 \cdot y - 22{,}548 = 0,$$

wo die positiven Wurzeln der beiden letzten Gleichungen bezüglich $= 2{,}41$ und $= 3{,}135$ sich ergeben. — Es bleibt jedoch nachträglich zu prüfen, ob auch im vorliegenden Fall die Voraussetzung 2), auf welcher die Gleichung 1) und die daraus abgeleiteten vorstehenden Resultate beruhen, für jeden Werth von x sich erfüllt findet. Diese Voraussetzung kann mit Rücksicht darauf, dass $r = \frac{5}{6} d$, $x = yd$ gesetzt wurde, auch so geschrieben werden:

$$1 - 2\alpha \leqq \frac{2\beta y}{\gamma\left(\frac{5}{6} + \alpha y\right)}$$

und ihr geschieht durch jedes y Genüge, wenn durch das kleinste $y = 1{,}444$. Hierfür ist aber

$$1 - 2\alpha = 0{,}10\,..; \quad \frac{2\beta y}{\gamma\left(\frac{5}{6} + \alpha y\right)} = 0{,}12\,...,$$

sodass die obige Voraussetzung in der That noch zutrifft.

Zur Berechnung des Hakens mit kreisförmigem Querschnitt giebt Redtenbacher die Formel:

$$\sin\varphi = \frac{k\pi}{16P} \cdot \frac{x^3}{2r + x},$$

welche, wenn

$$\frac{P}{k} = \frac{\pi d^3}{4}, \quad x = yd, \quad r = \varrho d$$

gesetzt wird, auf die Form

$$y^3 - 4\sin\varphi \cdot y - 8\varrho \sin\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{e)}$$

gebracht werden kann. Sie entspricht der gewöhnlichen Theorie der relativen Festigkeit und würde aus der Formel 3) in §. 23 erhalten werden, wenn man $P_x = P_z = 0$ setzt, wenn man also, da den Bedingungen der Aufgabe gemäss $P_y = M_x = M_z = 0$ ist, nur das Kraftmoment M_y berücksichtigt. Der bei Anwendung der Gleichung e) begangene Fehler ist um so grösser, je kleiner φ ist; für $\varphi = 0$ liefert dieselbe sogar $y = 0$ anstatt $y = 1{,}118 \cdot d$.

Aehnliches gilt von den Wiebe'schen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1{,}72 \cdot d\sqrt[3]{\sin\varphi} \\ x &= 2{,}06 \cdot d\sqrt[3]{\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{f)},$$

von denen die erste einem kreisförmigen, die zweite einem aus zwei halben Ellipsen zusammengesetzten Querschnitt (*Fig. 42*) entspricht, vorausgesetzt, dass $AM : MB = 1 : 5{,}5$ ist. Diese Formeln beruhen, abgesehen von gewissen, das Re-

sultat vereinfachenden Vernachlässigungen, auf einer Betrachtung, welche vollkommen auf die älteste GALILEI'sche Vorstellung vom Wesen der relativen Festigkeit (siehe p. 32) hinausläuft, und welche hier zufällig, wenigstens für grössere Winkel φ, ungefähr solche Dimensionen liefert, wie man sie in der Praxis auszuführen pflegt. Es ist aber wahrscheinlich, dass solche Haken, bis zum Bruch belastet, niemals in ihrem geraden, sondern stets in ihrem gekröpften (gebogenen) Theil brechen, also keine sogenannte Körper von gleichem Widerstande sein werden.

1854. F. K. H. WIEBE Lehre von den einf. Maschinentheilen*. p. 143.

Kapitel II.

Anwendungen der Statik auf die Prüfung der Stabilität und Widerstandsfähigkeit von Bauconstructionen.

I. Feste, hauptsächlich aus geraden stabförmigen Stücken zusammengesetzte Bauconstructionen.

§. 29. Einleitung.

Die festen Constructionen aus geraden stabförmigen Stücken als Haupttheilen, wie z. B. Bau- und Maschinengerüste, Dachgespärre, Brücken u. s. w., sind so mannigfaltig, dass es dem Zweck und Umfang dieses Buches nicht entsprechen würde, wenn ich dieselben systematisch und erschöpfend hier abzuhandeln versuchen wollte. Es liegt vielmehr nur in der Absicht, die Methode der theoretischen Prüfung ihres Gleichgewichts und ihrer Widerstandsfähigkeit unter dem Einfluss der, je nach ihrer Bestimmung verschiedenen, auf sie einwirkenden Kräfte an einigen ausgewählten Beispielen zu erörtern. Zuvor mögen hier einige allgemeine Vorbemerkungen ihre Stelle finden.

Das Material von dergleichen im Grossen ausgeführten Constructionen ist Holz, geschmiedetes oder gewalztes Eisen oder Gusseisen. — Insofern die belastenden Kräfte fast ausschliesslich Schwerkräfte sind, also gleiche Richtungen haben, lassen sich in Bezug darauf drei verschiedene Lagen der Constructionstheile unterscheiden, die horizontale, die verticale und geneigte, welche im Allgemeinen bei der Benennung wenigstens der grösseren Hauptheile zu Grunde gelegt werden. Bei horizontaler Lage heissen dieselben vorzugsweise Balken, Tragbalken, Träger, Schwellen; bei verticaler: Säulen, und zwar Hänge- oder Stehsäulen (Ständer), je nachdem sie von unten oder von oben belastet, also auf absolute oder rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen sind; bei geneigter Lage heissen sie gewöhnlich Sparren, besonders bei Dachconstructionen, wo dergleichen geneigte Stücke als grössere Haupttheile vorzugsweise vorzukommen pflegen. Die kleineren Stücke, die aber darum doch auch wesentliche Theile sein können, erhalten ihre Namen vornehmlich von der Art und Weise, wie sie von den Kräften, deren Uebertragung durch sie vermittelt

wird, angegriffen werden. Sie heissen Riegel, Spannriegel, Zangen, wenn sie lediglich auf absolute oder rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen werden; im ersteren Fall insbesondere Bänder, Zugbänder, Zugstangen, im letzteren Streben, Spreizen. Man nennt sie Arme, falls sie zumeist auf relative Festigkeit in Anspruch genommen sind.

Was die Verbindung der Constructionstheile betrifft, so hat man mit Rücksicht auf die statische Berechnung im Wesentlichen nur zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich dieselbe der Art ist, dass sie eine, wenn auch nur geringe, Drehung der beiden mit einander verbundenen Stücke gegen einander, d. h. eine geringe Veränderung des Winkels zulässt, den im unbelasteten Zustande ihre Mittellinien an der Verbindungsstelle bilden, oder ob dieses nicht der Fall ist. Im ersteren Fall können sich beide Theile unabhängig von einander biegen, da eine solche Biegung unter allen Umständen nur gering, also mit einer sehr geringfügigen Neigung der elastischen Linie (gebogenen Mittellinie oder Axe) gegen deren ursprüngliche Richtung verbunden ist; im zweiten Fall bedingen sich die Verbiegungen beider Theile gegenseitig, indem wegen der Unveränderlichkeit des Winkels zwischen ihren Mittellinien an der Verbindungsstelle eine Neigung der einen nothwendig eine entsprechende Neigung der anderen daselbst zur Folge haben muss. Erstere Verbindung mag lose, letztere fest heissen. Die lose Verbindung wird namentlich durch einen einzelnen Bolzen oder Pflock oder durch das Gegeneinanderstemmen vermittelst eines einfachen Vorsprungs bewerkstelligt, eine feste Verbindung durch mehrere Bolzen, durch Eckplatten, Schuhe und dergl. namentlich eiserne Hülfsstücke. Ob eine Verzapfung ohne solche die Festigkeit sichernde Hülfsmittel wie eine lose oder wie eine feste Verbindung wirkt, wird in der Regel von der weniger oder mehr sorgfältigen Ausführung abhängen.

Die stabförmigen Constructionstheile sowohl wie auch ihre Verbindungen können ferner zweckmässig in nothwendige, wesentliche und unwesentliche unterschieden werden. Nothwendige Stücke und Verbindungen kann man solche nennen, welche, selbst wenn alle eine unbegrenzte Widerstandsfähigkeit hätten, dennoch zum Gleichgewicht des Systems nothwendig sein würden; wesentliche solche, welche die Widerstandsfähigkeit wesentlich vergrössern oder welche, wenn auch nicht zum Stattfinden des Gleichgewichts an und für sich, so doch wenigstens zu der besonderen Art und Weise nöthig sind, wie dasselbe stattfinden soll; unwesentliche endlich solche, von denen weder das Eine, noch das Andere behauptet werden kann. Eine feste Verbindung kann als solche unwesentlich oder wenigstens nicht nothwendig sein, während die dafür substituirte lose Verbindung vielleicht wesentlich oder gar nothwendig sein würde.

Uebrigens liegt es in der Natur der Sache, dass eine vollkommen bestimmte Abgrenzung in dieser Beziehung nicht möglich ist; wenn auch, nachdem einmal gewisse Stücke und Verbindungen als nothwendig oder wesentlich angenommen worden sind, die übrigen dadurch als nothwendig, wesentlich oder unwesentlich vollkommen bestimmt sein können, so ist doch eben jene erste Annahme sehr häufig mehr oder weniger willkürlich. Wenn z. B. bei dem Galgengerüst,

Fig. 43, ausser der Säule CC' und dem Arm AC auch die Strebe BD als nothwendig angenommen wird, so ist es unnöthig, im Allgemeinen auch nicht einmal wesentlich, dass die Verbindungen bei B, C und D feste Verbindungen sind, während es nothwendig ist, dass daselbst Verbindungen überhaupt stattfinden. Es könnte wesentlich sein, dass dieselben bei B und D feste sind, wenn dadurch nämlich bei einer im Verhältniss zu ihrer Dicke bedeutenden Länge der Strebe beabsichtigt wird, ihre Biegung zu verhindern und so ihre Widerstandsfähigkeit wesentlich zu erhöhen. Statt der Strebe BD könnte aber auch eine feste Verbindung zwischen dem Arm und der Säule als nothwendig und gegeben angenommen werden; dann ist die Strebe BD zwar nicht nothwendig, wohl aber wesentlich, sofern dadurch eine wesentliche Verstärkung des Arms und eine Sicherung jener festen Verbindung erreicht wird. Wenn die Säule CC' am unteren Ende durchaus fest eingelassen, z. B. eingemauert ist, so ist die untere Strebe nicht nur nicht nothwendig, sondern auch unwesentlich; wäre dagegen die Säule nur in eine Schwelle eingezapft, so würde die Strebe $D'B'$, wenn auch nicht zur Verstärkung der Säule, so doch wenigstens zur Sicherung des Zapfens wesentlich sein. Die Verweisung der Constructionstheile und Verbindungen in die oben erwähnten drei Kategorien ist also von der Reihenfolge abhängig, in welcher dieselben in Betracht gezogen werden; im Allgemeinen wird es am angemessensten sein, hierbei mit den Verbindungen den Anfang zu machen, in vorstehendem Beispiel also die feste Verbindung bei C als unwesentlich, und deshalb die Strebe BD als nothwendig zu bezeichnen.

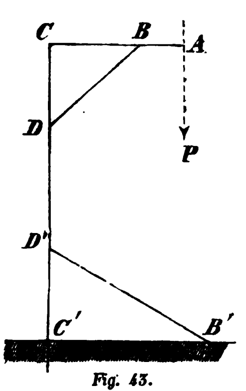


Fig. 43.

Die durch die folgenden Paragraphen beispielsweise zu erörternde wiederkehrende Aufgabe besteht zunächst in der Untersuchung der Art und Weise, wie die auf eine im Entwurf vorliegende Construction wirkenden Kräfte durch die Theile des Systems hindurch bis zu den festen Stützpunkten fortgepflanzt und wie dabei diese Theile in Anspruch genommen werden. Das vorige Kapitel lehrt dann die Dimensionen berechnen, welche sie haben müssen, um diesen Einwirkungen mit Sicherheit Widerstand leisten zu können.

Die Anordnung der Construction im Allgemeinen ist bedingt durch ihren Zweck, durch die Art des zu verwendenden Materials und durch die Erfahrungen, welche in Betreff ähnlicher Constructionen zu ähnlichen Zwecken und unter ähnlichen Umständen gemacht worden sind. Mehr oder weniger ist sie willkürlich und der Erfindungsgabe, dem praktischen Gefühl und dem Geschmack des Constructeurs überlassen, auch häufig von zufälligen Nebenbedingungen abhängig. Die Wahl des Materials ist bedingt durch seine Dauerhaftigkeit, sein Gewicht, durch seinen verschiedenen Preis im rohen Zustande, sowie auch durch die Möglichkeit, resp. Leichtigkeit und Vortheilhaftigkeit seiner Bearbeitung zu den verlangten Formen, endlich von der Art und Weise, wie das betreffende Stück bei der belasteten Construction in Anspruch genommen wird. Die allgemeinsten Regeln in dieser Beziehung beruhen darauf, dass den

Metallen eine grössere Dauerhaftigkeit zukommt, als den Hölzern, dass namentlich das Gusseisen sich am leichtesten und vortheilhaftesten in eine zusammengesetztere Form bringen lässt, dass Schmiedeeisen mehr einem Zug, Gusseisen mehr einem Druck zu widerstehen vermag, dass sehr veränderliche oder gar stossweise wirkende Belastungen eher dem Holz und Schmiedeeisen, als dem mehr starren und im Allgemeinen öfter mit versteckten Fehlern behafteten Gusseisen anvertraut werden können. Uebrigens ist die Berücksichtigung aller dieser Umstände Sache der praktischen Baukunst und sollte hier nur flüchtig angedeutet werden.

Wenn aber auch der Entwurf einer Construction im Allgemeinen als gegeben, d. h. durch verschiedene praktische Rücksichten festgestellt vorausgesetzt wird, so bleibt doch zu ihrer näheren Feststellung noch ein je nach ihrer mehr oder weniger complicirten Beschaffenheit grösserer oder geringerer Spielraum, in Bezug nämlich auf die bestimmten Punkte, wo und die bestimmten Winkel, unter welchen die einzelnen Stücke am vortheilhaftesten mit einander zu verbinden sind. Diese nähere Feststellung kann zwar theilweise auch von dem Zweck der Construction oder von zu erfüllenden Nebenbedingungen abhängig sein; hauptsächlich aber und insoweit sie mit diesen Bedingungen verträglich, ist sie eine weitere Aufgabe der theoretischen Untersuchung, welche uns hier beschäftigt. Wenn nämlich, wie es im Allgemeinen geschehen wird, die erforderlichen Dimensionen der Constructionselemente als Functionen der die Lage jener Verbindungspunkte bestimmenden Buchstabengrössen und jener Winkel sich darstellen, so hat man sich zu fragen, wie diese Grössen gewählt werden müssen, um jene Dimensionen und damit die Herstellungskosten nicht sowohl des einzelnen Stücks, als vielmehr aller Stücke zusammen betrachtet, möglichst klein zu machen; man hat aber zu beachten, dass die vortheilhafteste Lage eines einzelnen Theils andere Theile der Construction benachtheiligen kann, aus welchem Grunde man zur Vermeidung übergrosser Weitläufigkeiten zumeist mit einer näherungsweisen Erledigung der in Rede stehenden Aufgabe sich begnügen muss.

In Betreff der zweckmässigsten Berechnung einer Construction hinsichtlich der auf ihre einzelnen Theile ausgeübten Wirkungen lässt sich eine allgemein gültige Vorschrift nicht aufstellen. Man hat zu berücksichtigen, dass die Art und Weise, wie und das Grössenverhältniss, in welchem die belastenden Kräfte durch diese Theile hindurch und bis zu den Befestigungs-, resp. Stützpunkten des ganzen Systems fortgepflanzt werden, streng genommen von der Ausdehnung, Verkürzung, Verbiegung der Stücke, überhaupt von der Formänderung der ganzen Construction abhängig ist, deren vollständige Berücksichtigung aber in den bei weitem meisten Fällen zu so grossen Weitläufigkeiten führt, dass man genöthigt ist, mit einem Näherungsverfahren sich zu begnügen, welches zu der mehr oder weniger beschränkten Wichtigkeit der Sache, zu der Unsicherheit bezüglich auf die gar nicht in Rechnung zu stellenden Zufälligkeiten, denen die Construction ausgesetzt ist, und auch zu der Unsicherheit und Willkür, welche in Betreff der dem verwendeten Material höchstens anzuvertrauenden specifischen Ausdehnung stattfindet, in einem angemessenen Ver-

hältniss steht. Wenn nun auch dieses Verfahren den jedesmaligen Umständen angepasst werden muss und deshalb ziemlich verschieden sein kann, so lassen sich doch wenigstens einige Principien und allgemeine Bemerkungen hinstellen, deren Vergegenwärtigung als Leitfaden von grossem Nutzen ist, wenn es sich darum handelt, das zur Berechnung einer der allgemeinen Anordnung nach gegebenen Construction passendste Verfahren zu bestimmen, oder von den häufig abweichenden Methoden verschiedener Schriftsteller und Constructeurs zur Berechnung derselben Construction die angemessenste auszuwählen.

1. Es ist schon oben bemerkt worden, dass, wenn zwei Stücke fest mit einander verbunden sind, ihre Verbiegungen auf eine unmittelbare Weise sich gegenseitig bedingen, indem die vollkommen feste Verbindung dadurch charakterisirt ist, dass der Winkel, unter welchem die Mittellinien der Stücke an der Verbandstelle gegen einander geneigt sind, ein vollkommen unveränderlicher ist, so dass daselbst eine Neigung der einen gegen ihre ursprüngliche Richtung nicht ohne eine entsprechende (in der Regel ebenso grosse, da zumeist die Drehung der Mittellinien in ihrer ursprünglichen Ebene stattfindet) Neigung der anderen eintreten kann. Es ist daher leicht einzusehen, dass die Substituirung loser Verbindungen für feste zur Vereinfachung der Untersuchung nicht wenig beitragen muss, und es wird auch in der Regel zweckmässig sein, mit dieser Vereinfachung den Anfang zu machen; dadurch wird sie vorzugsweise in möglichst ausgedehntem Masse zur Anwendung kommen. Natürlich wird man sich zunächst auf die Ersetzung derjenigen festen Verbindungen durch lose beschränken, deren Festigkeit offenbar unwesentlich ist, und nur im Nothfall oder falls eine grössere Genauigkeit nicht erforderlich ist, auch diejenigen angreifen, welche mehr oder weniger wesentlich sind, aber natürlich niemals nothwendig sein dürfen, widrigenfalls nicht nur die Widerstandsfähigkeit der Construction mehr oder weniger fehlerhaft aufgefasst, sondern auch ihre Stabilität, d. h. ihre erste und nothwendige Bedingung aufgehoben werden würde. Bei einigermassen zusammengesetzten Systemen pflegen übrigens dergleichen nothwendig feste Verbindungen kaum vorzukommen.

2. Als ein besonderer Fall des allgemeinen Vereinfachungsmittels der Rechnung, bestehend in der Ersetzung einer festen Verbindung durch eine lose, ist es auch zu betrachten, wenn man, wie es nicht selten zu geschehen pflegt, einen mehrfach unterstützten Balken bei den Stützpunkten durchgeschnitten denkt, ihn also durch mehrere kürzere Balken ersetzt denkt, die an den Enden frei aufliegen oder in gewissem Sinn mit den Stützen selbstständig drehbar verbunden sind. Im Allgemeinen wird es von dem verlangten Grade der Genauigkeit der Rechnung abhängen, ob die Continuität des Balkens über den Stützen als wesentlich oder nicht, und demgemäss ihre vorausgesetzte Aufhebung als zulässig zu betrachten sei oder nicht. So viel lässt sich im Allgemeinen bemerken, dass die Vernachlässigung der Continuität des Balkens auf die Berechnung seiner eigenen Dimensionen geringeren Einfluss hat, als auf die Berechnung der Pressungen, welche die Stützpunkte zu erleiden haben, und dass dabei die letzteren um so fehlerhafter sich herausstellen, je weniger die Anzahl der Stützpunkte die nothwendige Zahl von zweien übertrifft. Die Richtigkeit

dieser Bemerkung wird schon durch §. 15 hinlänglich gerechtfertigt. Aus den dortigen Angaben ist leicht zu entnehmen, dass bei einem durch eine gleichförmig vertheilte Last beschwerten Balken von der Länge a, $2a$, $3a$, $4a$, wenn derselbe resp. auf 2, 3, 4, 5 gleich weit, nämlich um die Länge a von einander entfernten Stützen liegt, die zulässigen Belastungen dieser Längen a bei gleicher Sicherheit sich zu einander verhalten $= 8 : 8 : 10 : 9\frac{1}{3}$, dass sie mithin nicht allzu beträchtlich zunehmen und zwar, wie man nebenbei bemerken kann, weniger zunehmen, wenn sich in der Mitte eine Stütze, als wenn sich daselbst ein Zwischenraum befindet. Was aber die Pressungen auf die Stützen betrifft, so verhalten sie sich bei dem 3, 4, 5fach gestützten Balken der Reihe nach bezüglich

$$= 3 : 10 : 3, \quad = 4 : 11 : 11 : 4, \quad = 11 : 32 : 26 : 32 : 11,$$

während sie sich bei wirklicher Trennung über den Stützen verhalten würden

$$= 3 : 6 : 3, \quad = 4 : 8 : 8 : 4, \quad = 11 : 22 : 22 : 22 : 11.$$

Besonders sind es die den Endstützen zunächst liegenden Mittelstützen, welche bei der Continuität des Balkens einen grösseren Druck erleiden, als ohne dieselbe. Uebrigens muss in Betreff der hier-besprochenen Vereinfachung berücksichtigt werden, dass die aus §. 15 citirten Resultate wesentlich auf der Annahme beruhen, dass die Stützpunkte genau in gleicher Höhe liegen, eine Annahme, für deren Zutreffen in vielen Fällen nur mit einem sehr geringen Grade der Zuverlässigkeit gutgesagt werden kann, insbesondere dann, wenn diese Stützpunkte nicht auf festem Mauerwerk oder auf festen Gerüsten sich befinden, sondern vielmehr durch elastische und selbst in mehr oder weniger unzuverlässiger Weise abgeglichene und unterstützte Constructionstheile hergestellt werden, wie es z. B. mit den Hängesäulen eines Hängewerks der Fall ist, durch welche die Hauptträger einer hölzernen Brücke an mehreren Punkten getragen werden. Bei Rücksichtnahme auf die Continuität des Balkens muss freilich eine bestimmte Annahme hinsichtlich der Höhe der Stützpunkte zu Grunde gelegt werden; und da es ebenso wahrscheinlich ist, dass einzelne derselben wegen mangelhafter Ausführung der Construction sich über, als dass sie sich unter der Linie der übrigen befinden werden, so ist nicht nur die einfachste, sondern auch die natürlichste Annahme ohne Zweifel diejenige, dass alle in gleicher Höhe liegen. Andererseits kann aber die bemerkte Ungewissheit einen Grund mehr für die noch einfachere Vernachlässigung der Continuität über den Stützen abgeben.

3. Mitunter kann man sich auch veranlasst sehen, von dem Vorhandensein gewisser loser und selbst fester Verbindungen ganz und gar zu abstrahiren, sei es nun dass dieselben in der That unwesentlich oder dass sie wenigstens auf den bei der Rechnung einzuschlagenden Gang ohne wesentlichen Einfluss sind. Denkt man sich z. B. einen in verticaler Lage am oberen Ende aufgehängten oder befestigten, unten durch ein angehängtes Gewicht belasteten Stab an einer beliebigen Stelle mit einem horizontal auf zwei Stützen liegenden zweiten Stabe in dessen Mitte verbunden, so wird durch diese Verbindung der obere Theil des ersteren Stabes zwar offenbar theilweise

entlastet, indem bei der Verlängerung dieses oberen Theils in Folge des unten angehängten Gewichtes gleichzeitig der horizontale Stab sich biegen muss und durch seine Elasticität, d. h. seinen Widerstand gegen diese Biegung einen derselben entsprechenden Theil der Belastung im Gleichgewicht hält oder trägt, desselben Uebertragung an den oberen Theil des hängenden Stabes folglich verhindert. Indessen ist diese Entlastung und somit die Verbindung selbst durchaus unwesentlich, falls die Längen beider Stäbe (der hängende vom oberen Endpunkt bis zum Verbindungspunkt mit dem liegenden gerechnet) beträchtlich grösser, als ihre Querdimensionen und unter sich ziemlich gleich sind, wenn wenigstens der liegende Stab nicht etwa bedeutend kürzer ist, als der andere. Es hat dies seinen Grund in der folgenden allgemeinen Bemerkung, deren Vergegenwärtigung zur Beurtheilung solcher unwesentlicher, also bei der Berechnung einer Construction ganz ausser Acht zu lassender, Verbindungen von Nutzen ist.

Haben ein nicht sehr nahe bei einem Stützpunkt transversal belasteter und ein in der Längenrichtung gezogener oder gedrückter Stab von gleichem Material ziemlich gleiche oder wenigstens nicht allzu verschiedene Dimensionen, sind ferner die Längen beider bedeutend grösser als ihre Querdimensionen, und nennt man das Verhältniss einer solchen Querdimension zur Länge ein Kleines der ersten Ordnung, so ist diejenige Belastung, durch welche eine gewisse Durchbiegung des ersteren Stabes hervorgebracht wird, eine kleine Grösse der zweiten Ordnung im Vergleich mit derjenigen, welche eine ebenso grosse Ausdehnung oder Verkürzung des zweiten Stabes bewirkt, oder es ist, was dasselbe sagt, das Verhältniss der Längenänderung des zweiten Stabes zu der Durchbiegung des ersteren eine kleine Grösse der zweiten Ordnung, wenn beide durch dieselbe Kraft hervorgebracht werden. Denkt man sich nämlich einen Stab von der Länge l mit quadratischem Querschnitt von der Seite 1, denselben durch das Gewicht P gezogen oder gedrückt und die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, so ist seine Ausdehnung oder Verkürzung $= \frac{P}{E} l$; wird aber derselbe Stab mit den Enden horizontal auf Stützen liegend in der Mitte durch das Gewicht P belastet, so ist seine Senkung daselbst nach §. 10, 2) $= \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{48} = \frac{P}{E} \cdot \frac{l^3}{4}$, weil nämlich $J = \frac{1 \cdot 1^3}{12} = \frac{1}{12}$ ist. Es verhält sich also jene Längenänderung zu dieser Durchbiegung $= 1 : \frac{l^2}{4}$. Beide würden gleich sein, wenn der Stab nur doppelt so lang als dick wäre; ist aber seine Länge = der 10fachen Dicke, so ist die Biegung schon 25 Mal so gross als die Dehnung. Allgemein ist, wenn a eine Querschnittsdimension bezeichnet, zu welcher die übrigen in Verhältniss gesetzt sind, die Längenänderung des gezogenen oder gedrückten Stabes der Grösse $\frac{l}{a^2}$, die Durchbiegung des transversal belasteten Stabes der Grösse $\frac{l^3}{J}$, also auch der Grösse $\frac{l^3}{a^4}$ proportional, so dass sich beide zu einander verhalten $= a^2 : l^2$ abgesehen von den freilich verschiedenen constanten Coefficienten. Die

Verschiedenheit derselben würde jedoch das nur eine relative Bedeutung beanspruchende Gesetz erst dann beeinträchtigen, wenn der transversal belastete Stab bedeutend höher als breit und der Angriffspunkt der belastenden Kraft einem Stützpunkt sehr nahe wäre.

Uebrigens muss man bei der Anwendung der vorstehenden allgemeinen Bemerkung zur Beurtheilung der statischen Bedeutung einer bei einer Construction vorkommenden Verbindung mit Vorsicht erwägen, dass eine solche zwar in gewisser Beziehung unwesentlich sein, in anderer Beziehung aber gleichwohl einen wesentlichen Nutzen haben kann. So ist es z. B. hinsichtlich der Niete, durch welche bei einem eisernen Gitterträger die sich kreuzenden Eisenstäbe an den Kreuzungspunkten unter sich verbunden werden, der vorigen Bemerkung zufolge ganz unwesentlich, dass dadurch die gezogenen oder gedrückten Stäbe bei ihrer Ausdehnung oder Verkürzung die von ihnen gekreuzten Stäbe gleichzeitig zu einer Biegung veranlassen und so mehr oder weniger dieselben belasten, selbst aber durch sie entlastet werden können. Gleichwohl haben diese Vernietungen einen wesentlichen anderweitigen Nutzen. An jeder Stelle des Gitterträgers sind nämlich die nach der einen Richtung verlaufenden Stäbe auf absolute, die anderen von jenen gekreuzten auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen. Die ersteren haben das Bestreben, in der verticalen Biegungsebene des Gitterträgers zu bleiben, die letzteren würden ohne die in Rede stehenden Vernietungen ihrer grossen Länge und geringen Dicke wegen sich verbiegen und seitwärts aus der Ebene der ersteren Stäbe mit Ausnahme ihrer Endpunkte heraustreten; sie würden also auf zusammengesetzte rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen und einen nur geringen Widerstand darbieten. Dadurch aber, dass man sie mit den gezogenen Gitterstäben vernietet, hält man sie in der Biegungsebene des Gitterträgers fest und wird berechtigt, sie auf einfache rückwirkende Festigkeit zu berechnen. Setzt man also von vorn herein voraus, dass diese gedrückten Stäbe sich nicht verbiegen, sondern in der Gitterwand einfach zusammengedrückt werden, so werden dadurch die Vernietungen der Stäbe unter sich durchaus unwesentlich, und man darf sie bei der weiteren Analyse der Wirkungsweise des Systems ganz ausser Acht lassen.

4. Hat man nun so die festen Verbindungen so viel als zulässig durch lose ersetzt und die Verbindungen überhaupt möglichst beschränkt, so kann man die Constructionstheile selbst in Betracht ziehen und die mehr oder weniger unwesentlichen Stücke entfernt denken, wozu namentlich solche zu rechnen sind, welche nur zur grösseren Sicherung des in verlangter Weise auch ohne sie stattfindenden Gleichgewichts der ganzen Construction und der allenfalls auch ohne sie genügenden Widerstandsfähigkeit der übrigen Stücke derselben dienen, und welche besonders auch mit Rücksicht auf zufällige Störungen der Belastung angeordnet werden, die bei der Berechnung des Entwurfs nicht wohl in die Formeln eingeführt werden können. Während die Ausserachtlassung von Verbindungen überhaupt oder die Ersetzung fester durch lose, wenn man damit den Anfang macht, einigermassen willkürlich ist, wird diese Willkür bei der folgenden Bezeichnung der unwesentlichen Stücke weit geringfügiger, und die Zahl dieser ausser Acht zu lassenden Stücke wird um so geringer sein, in

je grösserem Maasse die Beschränkung der Verbindungen ausgeführt worden ist; namentlich können dadurch, dass gewisse feste Verbindungen durch lose ersetzt werden, gewisse Stücke, die zunächst nur die Festigkeit jener Verbindungen unterstützen oder gegen die aus ihrem Bruch hervorgehende Gefahr schützen sollten, zu wesentlichen und selbst nothwendigen Theilen werden. Dieser Willkür wegen kann man sich zuweilen veranlasst sehen, die Berechnung der Construction in doppelter Weise durchzuführen; einmal bei Voraussetzung von mehr festen und mehr Verbindungen überhaupt, dagegen weniger Stücken; das andere Mal mit weniger festen und weniger Verbindungen überhaupt, aber mehr Stücken. Für die Dimensionen der zweifach berechneten Haupttheile würden dann angemessener Weise die Mittelwerthe der unter beiden Voraussetzungen als erforderlich gefundenen anzunehmen sein.

Die Wirkungsweise der einzelnen Stücke einer Construction ist übrigens zu sehr von der besonderen Beschaffenheit und Belastungsweise der letzteren abhängig, als dass sich behufs ihrer Unterscheidung in wesentliche und unwesentliche erschöpfende Regeln aufstellen liessen; auch ist zu bedenken, dass oft dasselbe Stück mehrere Zwecke erfüllt und dass es in einer Beziehung wesentlich, in einer anderen unwesentlich sein kann. In der Regel werden die unwesentlichsten unter denjenigen kleineren Stücken zu suchen sein, welche ihrer Wirkungsweise nach als Riegel, Bänder oder Streben zu bezeichnen sind, namentlich dann, wenn dieselben einer für eine gewisse normale Belastung berechneten Construction nur schliesslich deswegen hinzugefügt werden, um eine vermehrte Sicherheit bei jener normalen und zugleich hinreichende Sicherheit bei einer etwa gestörten Belastung zu erreichen. So ist es z. B. mit den durch kurze Bänder, Riegel etc. bewerkstelligten Eckverbänden an den stumpfen Winkeln, welche von den Sparren eines gebrochenen Daches gebildet werden: sie können bei der für die normale Belastung auszuführenden Berechnung der Construction ganz ausser Acht gelassen werden, falls den Sparren solche Neigungen gegeben werden, dass ihre Berührung in einem Punkte zum Gleichgewicht hinreichen würde, indem jene Bänder etc. nur mit Rücksicht auf die Labilität dieses Gleichgewichts den Zweck haben, dasselbe auch für eine durch Winddruck u. s. w. gestörte Belastung zu sichern. — Wenn dergleichen Streben gewisse nicht sehr nahe an den Enden befindliche mittlere Stellen eines belasteten Balkens mit festen Stützpunkten verbinden und so dem Balken selbst mehr oder weniger feste Unterstützungen gewähren, so haben sie den wesentlichen Erfolg, dass sie durch Verminderung der frei tragenden Länge des Balkens dessen Tragfähigkeit vergrössern; sind dagegen solche Streben sehr kurz, so dass die solcher Art gestützten Stellen des Balkens seinen Enden verhältnissmässig sehr nahe liegen, so werden die Streben in der eben erwähnten Beziehung zwar unwesentlich, sie können aber nun, wenn nur die Endpunkte des Balkens verhindert sind, von ihren Stützpunkten sich zu entfernen, in anderer Beziehung wesentlich werden, insofern nämlich, als sie den ohne sie vielleicht nur lose aufliegenden Balken seiner Biegungsweise nach gewissermassen in einen beiderseits eingeklemmten und deshalb mehr tragenden verwandeln. — Riegel oder Zangen, welche dazu dienen, mittlere Punkte einer längeren Strebe oder eines sonstigen auf rück-

wirkende Festigkeit in Anspruch genommenen Stücks festzuhalten, um dessen Biegung zu verhindern, können bei der Berechnung als unwesentlich ausser Acht gelassen werden, wenn gleichzeitig jene Streben u. s. w. als unbiegsam vorausgesetzt, also trotz ihrer grösseren Länge auf einfache rückwirkende Festigkeit berechnet werden.

5. Wenn nach Beseitigung der als unwesentlich zu betrachtenden Verbindungen und Stücke das System noch zu complicirt geblieben ist, als dass seine unmittelbare Berechnung mit hinlänglicher Leichtigkeit ausführbar wäre, so kann man sich zuweilen durch besondere Verfahrungsarten und Betrachtungen Erleichterung verschaffen, deren zweckmässige Wahl durch Uebung in solchen Rechnungen, durch eine klare Einsicht in die Wirkungsweise der zu berechnenden speciellen Construction, besonders auch durch Erfahrungen treffen gelehrt wird, welche hinsichtlich der Umstände, die mit dem Bruch einer derartigen nicht ausreichend stark gewesenen Construction verbunden waren, gemacht worden sind.

Eine noch einigermassen allgemeinere unter diesen besonderen Verfahrungsarten besteht z. B. darin, dass man eine zusammengesetztere Construction aus mehreren theilweise (in den Haupttheilen) sich deckenden Systemen bestehend betrachtet, die gesammte Belastung unter diese einzelnen Systeme im Verhältniss ihrer einzelnen Tragfähigkeiten (die man bei noch nicht vollkommen gegebenen Dimensionen einigermassen willkürlich, z. B. am einfachsten gleich gross annehmen kann, falls dies den obwaltenden Umständen nicht widerspricht) vertheilt, dann die erforderlichen Querschnitte sämmtlicher Stücke aller einzelnen Systeme berechnet, und schliesslich bei dem zusammengesetzten Systeme denjenigen Stücken, zu welchen sich mehrere zusammenfallende Stücke der einzelnen Systeme vereinigen, an jeder Stelle die Summe der für diese Stelle als erforderlich gefundenen einzelnen Querschnitte zum Querschnitt giebt; so kann man es wenigstens halten, wenn die Theile der einzelnen Systeme nur einfach ihrer Länge nach ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, widrigenfalls nicht die Querschnitte selbst, sondern die in ihnen stattfindenden Spannungen und Spannungsmomente zusammengesetzt werden müssen und ihrer Gesammtwirkung entsprechend der Gesammtquerschnitt zu bestimmen ist. — Ein solches Verfahren der Zerlegung in einzelne Systeme, die in wenigen der hauptsächlichsten Theile sich decken, die übrigen Stücke aber unter sich vertheilen, könnte z. B. bei der Berechnung eines zusammengesetzteren Gitterträgers in Anwendung gebracht werden, indem für denselben zwei oder mehr andere von gleicher Länge und Höhe substituirt werden, von denen jeder nur einen Theil der sich kreuzenden Gitterstäbe enthält in solcher Weise, dass die letzteren sich gegenseitig nur in einem Punkte kreuzen und dass erst durch ihre Aufeinanderlegung, wobei die Kreuzstreben jedes Gitters in die Zwischenräume zwischen denjenigen der übrigen Gitter hineinfallen, das zusammengesetzte Gitterwerk hervorgehen würde. Jeden dieser n einfacheren Gitterträger kann man mit dem $n$ten Theil der Gesammtbelastung belastet denken und findet dann die Querschnitte der Gitterstäbe ohne Weiteres richtig, diejenigen der oberen und unteren Gurtung aber näherungsweise durch

Summirung der entsprechenden erforderlichen Querschnitte der Gurtungen der einzelnen Gittersysteme.

6. Trotz aller bemerkten Vereinfachungen, und wenn auch bei mangelnden oder vernachlässigten festen Verbindungen eine unmittelbare Abhängigkeit der Formveränderung der einzelnen Stücke von einander nicht vorhanden sein sollte, so bleibt doch wegen der durch die Elasticität derselben bedingten Lage ihrer nicht an den festen Unter- und Widerlagern gelegenen Endpunkte und ihrer Verbindungspunkte überhaupt noch immer, selbst bei sehr einfachen Constructionen, eine solche mittelbare Abhängigkeit zwischen ihnen bestehen, dass deren vollständige Berücksichtigung in den meisten Fällen zu allzu verwickelten Rechnungen führen würde. Um diese abzukürzen, hilft man sich dann nach Erschöpfung der übrigen Mittel dadurch, dass man einzelne Theile des Systems (insofern es sich nicht um die Prüfung ihrer eigenen Widerstandsfähigkeit handelt, die durch ihre Elasticität wesentlich bedingt sein kann) als vollkommen starr voraussetzt, wobei man jedoch vorsichtig sein und es sich in jedem Falle überlegen muss, ob eine solche Vernachlässigung einen wesentlichen oder nur einen unwesentlichen Fehler verursacht. In der Regel wird der Fehler um so geringfügiger sein, je weniger die einzelnen Stücke verschiedene Längen und verschiedene Querdimensionen haben, und je weniger spitz die Winkel sind, unter welchen sie gegen einander stossen.

Ein Beispiel, bei welchem rücksichtlich auf die Zutheilung des Drucks an die einzelnen Theile die Vernachlässigung ihrer Elasticität je nach den Umständen einen wesentlichen oder unwesentlichen Fehler verursacht, liefert die nebenstehend skizzirte sehr einfache Construction, wobei ein horizontaler Balken AB (*Fig. 44*) am einen Ende bei A eingemauert, am anderen, wo er das Gewicht P trägt, durch eine mit der festen Wand AC bei C verbundene Spannschiene (Helfschiene) BC gestützt ist. Wenn man hier auch die etwa festen, als solche jedoch ohne Zweifel unwesentlichen, Verbindungen der Schiene bei B und C durch lose Verbindungen ersetzt denkt, so dass sie um diese ihre Endpunkte drehbar wird und nur auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen (nicht gleichzeitig gebogen) werden kann, so ist doch die Spannung der Schiene, also der Antheil, womit sie die Tragfähigkeit des Balkens (des einzigen nothwendigen Constructionstheils) vergrössert, noch immer von der Elasticität des Balkens abhängig, weil jene Spannung zunächst zu der Verlängerung der Spannschiene, also zu der Lage des Verbindungspunktes B in einer nothwendigen Beziehung steht, diese Lage aber auch durch die gleichzeitige Zusammendrückung und namentlich die Biegung des Balkens bedingt wird. Um also die hierdurch verursachten Weitläufigkeiten der Untersuchung zu vermeiden, würde man beide Theile einstweilen als unelastisch

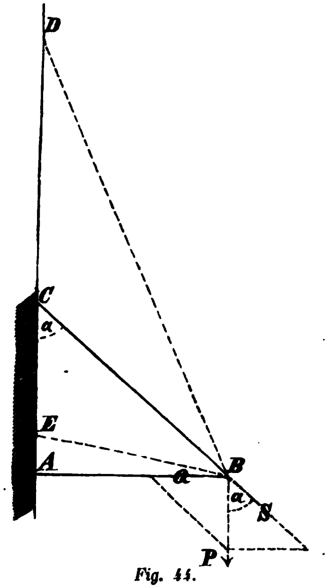


Fig. 44.

voraussetzen und ihre Widerstandsfähigkeit einfach auf die Weise prüfen, dass man P in die zwei Componenten:

$$Q = P \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad S = P \cdot \sec \alpha$$

zerlegt, von denen die erste nach der Axe des Balkens gerichtete diesen auf rückwirkende, die andere nach CB gerichtete die Spannschiene auf absolute Festigkeit in Anspruch nimmt. Hierbei ist die Biegung des Balkens ganz vernachlässigt, worin freilich ein Widerspruch liegt, wenn man nachträglich erwägt, dass die rückwirkende Spannung des Balkens thatsächlich nicht ohne Verkürzung, die absolute Spannung der Schiene nicht ohne Verlängerung möglich ist, während doch jene Verkürzung mit dieser Verlängerung ohne gleichzeitige Biegung des Balkens augenscheinlich unverträglich ist; gleichwohl wird der Fehler im Allgemeinen unwesentlich sein, so lange α einen mittleren Werth hat.

Wäre jedoch α sehr klein, also die Spannschiene BD sehr lang, so würde man auf die angegebene einfache Weise ihren Antheil an der Tragfähigkeit der Construction merklich zu gross finden; es würde dann nämlich bei gleicher Spannung, also gleicher specifischer Ausdehnung der Schiene ihre totale Verlängerung weit grösser sein und derselben eine bedeutende, vielleicht grössere Biegung des Balkens entsprechen, als derselbe sogar ohne die Helfschiene erfahren würde oder selbst ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze zu erleiden im Stande wäre, so dass in Wirklichkeit bei der nothwendig geringeren Biegung des Balkens auch die Verlängerung und Spannung der Schiene geringer sein muss. Näherte sich andererseits der Winkel α einem rechten Winkel, so dass die Spannschiene etwa in die Lage BE käme, so würde ihre totale Verlängerung unter sonst gleichen Umständen zwar geringer sein, trotzdem aber einer bedeutendern Biegung des Balkens entsprechen, was in die Augen fällt, wenn man um die Punkte A und E mit den Radien AB und EB Kreise beschreibt; indem dieselben bei B unter einem sehr spitzen Winkel sich schneiden, hat sowohl eine geringe Verkleinerung des ersteren, als Vergrösserung des letzteren Radius eine beträchtliche Verrückung des Durchschnittspunktes B nach unten hin zur Folge. In diesen beiden Grenzfällen ist es also, um zuverlässige Resultate zu erhalten, unerlässlich, die Elasticität und dadurch bedingte gegenseitige Abhängigkeit der beiden Constructionstheile in Betracht zu ziehen.

Zur weiteren Durchführung des zuletzt erwähnten Beispiels und zur Prüfung des Einflusses, den die Vernachlässigung der Formänderung der Construction bei ihrer Belastung in einem einigermassen ungünstigen Falle auf das Endresultat ausüben kann, sei für den Balken AB (*Fig. 45*)

- a die Länge,
- E der Elasticitätsmodul,
- k die höchstens zulässige specifische Spannung,
- q der Querschnitt,
- J dessen Trägheitsmoment in Bezug auf seine Biegungsaxe;

ferner für die Schiene oder Zugstange BC:

- E' der Elasticitätsmodul,
- k' die höchstens zulässige Spannung,
- q' der Querschnitt.

Die Spannung S der Schiene ist unbekannt; sie ergiebt sich aus dem Umstand, dass der Verrückung BB' des Durchschnittspunktes der elastischen Linie des Balkens mit der Mittellinie der Schiene eine ebenso grosse Ausdehnung $CB' - CB$ der letzteren entsprechen muss, als sie durch die Spannung S bedingt wird, dass also die Projection von BB' auf die Richtung $CB = \frac{S}{E'q'} \cdot BC$ sein muss. Die Verrückung des Punktes B kann aus 1) der verticalen Senkung $DB' = f$ infolge der Biegung des Balkens durch die Kräfte $P - S \cdot \cos\alpha$ und $S \cdot \sin\alpha$, und aus 2) der horizontalen Verschiebung $BD = d$ zusammengesetzt betrachtet werden, welche letztere zum Theil eine nothwendige Folge jener Biegung, zum Theil die Folge der Zusammendrückung des Balkens durch die Kraft $S \cdot \sin\alpha$ ist.

Angenommen die Verrückung BB' sowie die Spannung S seien ermittelt, d. h. durch die gegebenen und gesuchten Grössen ausgedrückt, so ergeben sich die letzteren in der Zahl von zweien aus den beiden Bedingungen, dass die grösste Spannung in einem Punkte des Balkens $= k$, in einem Punkte der Schiene $= k'$ sein soll. Die grösste Spannung des Balkens findet offenbar in seinem äussersten Querschnitt bei A und zwar im Allgemeinen in demjenigen Punkte seines Umfangs statt, welcher von der neutralen Axe nach unten hin die grösste Entfernung $= e$ hat. Hier summirt sich die rückwirkende Spannung

$$\frac{e}{J}[(P - S \cdot \cos\alpha)\, a + S \cdot \sin\alpha \cdot f],$$

welche mit der Biegung durch die Kräfte $= P - S \cdot \cos\alpha$ und $S \cdot \sin\alpha$ verbunden ist, zu derjenigen

$$\frac{S \cdot \sin\alpha}{q},$$

welche durch die unmittelbare oder zusammendrückende Wirkung der Kraft $S \cdot \sin\alpha$ in allen Punkten des Querschnitts gleichmässig hervorgebracht wird, so dass man hat:

$$k = \frac{e}{J}[(P - S \cdot \cos\alpha)\, a + S \cdot \sin\alpha \cdot f] + \frac{S \cdot \sin\alpha}{q} \quad \ldots \text{a)},$$

die andere Bedingung liefert sofort:

$$k' = \frac{S}{q'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{b)}.$$

Die Gleichung a) könnte auch leicht aus Gleichung 4) in §. 23 erhalten werden.

Die Senkung $DB' = f$ des Endpunktes der elastischen Linie ergiebt sich aus deren Gleichung, diese durch zweifache Integration ihrer angenäherten Differentialgleichung:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} =$$
$$= (P - S \cdot \cos\alpha)(a - x) +$$
$$+ S \cdot \sin\alpha\,(f - y)$$

bezüglich auf das aus der Figur ersichtliche Coordinatensystem. Wird zur Abkürzung

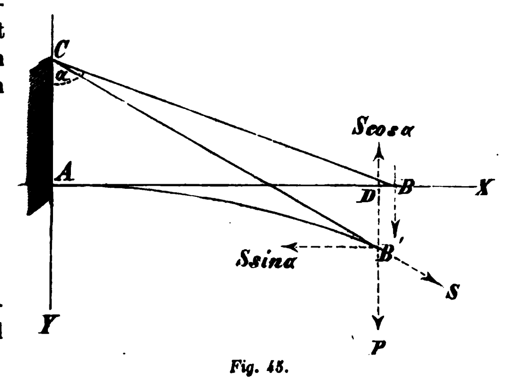


Fig. 45.

und dann

$$\left.\begin{array}{l}\frac{P-S\cdot\cos\alpha}{EJ}=m^2,\quad \frac{S\cdot\sin\alpha}{EJ}=n^2\\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2(a-x)+n^2(f-y)=z\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad c)$$

gesetzt, unter z eine Hülfsgrösse verstanden, durch deren Einführung die obige Differentialgleichung auf eine einfachere und bekannte Form gebracht werden soll, so folgt:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-n^2\frac{d^2y}{dx^2}=-n^2z,$$

mithin (s. §. 18)

$$z=A\cdot\sin(nx)+B\cdot\cos(nx)$$

oder, wenn jetzt für z wiederum sein Werth gesetzt wird, und die veränderten Constanten $\frac{A}{n^2}$ und $\frac{B}{n^2}$ noch mit A und B bezeichnet werden:

$$f-y=A\cdot\sin(nx)+B\cdot\cos(nx)-\frac{m^2}{n^2}(a-x)\;\ldots\ldots\; d).$$

Die Constanten A und B, sowie die Senkung f ergeben sich hieraus vermittelst der Bedingungen, dass

$$x=0,\ y=0;\quad x=0,\ \frac{dy}{dx}=0;\quad x=a,\ y=f$$

entsprechende Werthe sein müssen. (Die letzteren betreffend ist zwar streng genommen für $x=a=AB$ die entsprechende Ordinate der nach demselben Gesetz über B' hinaus fortgesetzt gedachten Curve AB' etwas grösser als DB', allein der Unterschied beider ist nur ein Kleines 3. Ordnung, wenn DB' ein Kleines 1. Ordnung ist.) Man findet:

$$A=-\frac{m^2}{n^3};\quad B=\frac{m^2}{n^3}\operatorname{tg}(na);\quad f=\frac{m^2}{n^3}(\operatorname{tg}(na)-na)\;\ldots\; e),$$

und die Gleichung der elastischen Linie, die uns hier jedoch nach erfolgter Bestimmung von f nicht weiter interessirt, wird:

$$y=\frac{m^2}{n^3}\left(\frac{\sin(na)-\sin(na-nx)}{\cos(na)}-nx\right)\;\ldots\ldots\; f).$$

Sie würde nur dann in Betracht kommen, wenn man es unternehmen wollte, denjenigen Theil der horizontalen Verrückung BD des Punktes B, welcher eine nothwendige Folge der Krümmung der elastischen Linie ist, genauer zu bestimmen, was nur durch die Rectification dieser Curve geschehen könnte. Weil indessen diese Verrückung von einer niederen Grössenordnung ist, als die Senkung f, so darf man sich um so mehr mit einer näherungsweisen Berechnung derselben begnügen, was am einfachsten dadurch geschehen kann, dass man die Curve als Bogen einer gewöhnlichen Parabel mit dem Scheitelpunkt A betrachtet, mit welcher die wirkliche Curve AB' ausser der gemeinschaftlichen Tangente AX die Eigenschaft gemein hat, dass der Krümmungsradius von A nach B' beständig zunimmt. Nach einer bekannten Näherungsformel für die Länge eines solchen sehr flachen vom Scheitelpunkt an gerechneten Parabelbogens ist dann die fragliche Verrückung bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$AB'-AD=\frac{2}{3}\frac{f^2}{a}$$

zu setzen, so dass mit Hinzurechnung derjenigen Verrückung, welche eine Folge der Zusammendrückung durch die Kraft $S \cdot \sin\alpha$ ist, man hat:

$$d = \frac{S \cdot \sin\alpha}{Eq} a + \frac{2}{3} \frac{f^2}{a} \quad \ldots \ldots \quad g).$$

Nun kann die Verlängerung s der Schiene beim Uebergang aus der Lage CB in die Lage CB' wegen der Kleinheit des Winkels BCB' gleichgesetzt werden der Projection der gebrochenen Linie BDB' auf die Richtung CB, folglich

$$s = d \cdot \cos(90^0 + \alpha) + f \cdot \cos\alpha = f \cdot \cos\alpha - d \cdot \sin\alpha \ldots h),$$

und da die specifische Verlängerung

$$\frac{s}{CB} = \frac{s \cdot \sin\alpha}{a}$$

auch $= \frac{S}{E'q'}$ sein muss, so hat man die Gleichung

$$\frac{S}{E'q'} = \frac{s \cdot \sin\alpha}{a} \quad \ldots \ldots \quad i),$$

woraus sich S ergiebt, nachdem für s der Werth nach h), für f und d die Werthe nach e) und g), für m und n die Werthe nach c) gesetzt worden sind. Die Einsetzung der Ausdrücke von f und S in die Gleichungen a) und b) setzt endlich in den Stand, bei gegebenen übrigen irgend 2 der Grössen P, a, α und derjenigen Dimensionen zu berechnen, wodurch die Querschnitte des Balkens und der Schiene der Gestalt und Grösse nach bestimmt sind.

Wenn man $\operatorname{tg}(na)$ in dem Ausdruck von f in eine nach den ganzen Potenzen von na fortschreitende Reihe entwickelt, so erhält man

$$f = \frac{m^2}{n^3}\left(\frac{(na)^3}{3} + \frac{2(na)^5}{15} + \ldots\right)$$

oder unter der Voraussetzung, dass na hinlänglich klein sei:

$$f = m^2 \frac{a^3}{3} = \frac{P - S \cdot \cos\alpha}{EJ} \frac{a^3}{3} \quad \ldots \ldots \quad e'),$$

und man sieht, dass diese Vereinfachung darauf hinausläuft, den Einfluss der Kraft $S \cdot \sin\alpha$ auf die Biegung des Balkens zu vernachlässigen (s. §. 8, 4), was in den Fällen der Anwendung wegen der sehr geringen Grösse von f in der That immer zulässig sein wird.

Aus demselben Grunde kann einfacher

$$d = \frac{S \cdot \sin\alpha}{Eq} a \quad \ldots \ldots \quad g')$$

gesetzt werden. Nun ist

$$s = \frac{a}{3EJ}\left[a^2(P \cdot \cos\alpha - S \cdot \cos^2\alpha) - \frac{3J}{q} S \cdot \sin^2\alpha\right] \ldots \quad h')$$

und aus der Gleichung i):

$$S = \frac{E'q' \cdot \sin\alpha}{3EJ}\left[a^2(P \cdot \cos\alpha - S \cdot \cos^2\alpha) - \frac{3J}{q} S \cdot \sin^2\alpha\right]$$

ergiebt sich

$$S = \frac{Pa^2 \cdot \cos\alpha}{a^2 \cdot \cos^2\alpha + \frac{3EJ}{E'q' \cdot \sin\alpha} + \frac{3J}{q} \cdot \sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{k).}$$

Schliesslich hat man zur Berechnung der beiden unbekannten Grössen wegen b) die Gleichung:

$$k'q' = \frac{Pa^2 \cdot \cos\alpha - \frac{3k'EJ}{E' \cdot \sin\alpha}}{a^2 \cdot \cos^2\alpha + \frac{3J}{q}\sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{l),}$$

und wegen a), falls das Glied $S \cdot \sin\alpha \cdot f$ consequenter Weise vernachlässigt wird:

$$kq = \frac{eq}{J}(P - k'q' \cdot \cos\alpha)\, a + k'q' \cdot \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{m).}$$

Wenn man im Nenner des Ausdrucks k) die beiden letzten Glieder gegen das erste vernachlässigt, so wird aus k), l), m):

$$S = \frac{P}{\cos\alpha} = k'q' = \frac{kq}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{n),}$$

wie es auch der einfachen Zerlegung der Kraft P (s. *Fig. 44*) in die nach BA und CB gerichteten Componenten entspricht. Man mag aber bemerken, dass die Vernachlässigung des letzten Gliedes im Nenner des Ausdrucks k) mit einem wesentlichen Fehler verbunden sein könnte, sowohl wenn α einem rechten Winkel sehr nahe, als auch wenn der Balken nicht vielmal länger als dick wäre; und dass die Vernachlässigung des 2. Gliedes wesentlich fehlerhaft sein könnte, sowohl indem α sehr klein, als indem $\frac{EJ}{E'q'}$ nicht sehr klein im Vergleich mit a^2, also der Balken dick und kurz und sehr viel dicker als die Schiene wäre. —

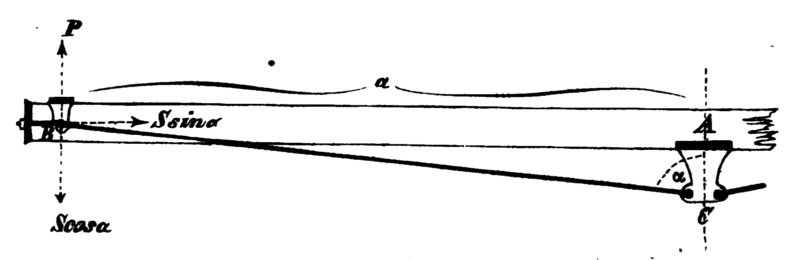


Fig. 46.

Die hier *Fig. 46* skizzirte **Verstärkungs-Construction eines Tragbalkens**, bestehend in schmiedeeisernen Zugbändern, wodurch die lose aufliegenden Enden des Balkens mit einer unter seiner Mitte angebrachten kurzen Stütze AC verbunden werden, ist nur eine Umkehrung und Verdoppelung des zuvor besprochenen Systems. Trägt der Balken die Last $2P$ in der Mitte, so finden die Formeln l) und m) unmittelbar Anwendung. Trägt er aber die Last $2Q$ gleichmässig vertheilt, so hat man nach §. 8, 4):

$$f = \frac{(Q - S \cdot \cos\alpha) - \frac{3}{8}Q}{EJ}\,\frac{a^3}{3} = \frac{\frac{5}{8}Q - S \cdot \cos\alpha}{EJ}\,\frac{a^3}{3};$$

es braucht also in e'), h'), k) und l) nur $\frac{5}{8}Q$ an die Stelle von P gesetzt zu werden. Ferner ist die Spannung, welche mit der Biegung durch die in B angreifende Kraft $Q - S \cdot \cos\alpha$ und die Belastung Q des halben Balkens AB im obersten Punkt des Querschnitts bei A verbunden ist:

$$= \frac{e}{J}\left[(Q - S \cdot \cos\alpha)\,a - Q\frac{a}{2}\right] = \frac{e}{J}\left(\frac{Q}{2} - S \cdot \cos\alpha\right)a,$$

so dass in a) und somit in m) nur $\frac{Q}{2}$ an die Stelle von P gesetzt werden muss. Die beiden Gleichungen, durch welche hier alle die Construction betreffenden Fragen beantwortet werden müssen, sind also folgende:

$$k'q' = \frac{\frac{5}{8}Q\,a^2 \cdot \cos\alpha - \frac{3k'EJ}{E' \cdot \sin\alpha}}{a^2 \cdot \cos^2\alpha + \frac{3J}{q}\sin^2\alpha} \quad \ldots \ldots \quad \text{o)},$$

$$kq = \frac{eq}{J}\left(\frac{Q}{2} - k'q' \cdot \cos\alpha\right)a + k'q' \cdot \sin\alpha \quad \ldots \quad \text{p)}.$$

Wenn man auch hier im Zähler und Nenner des Ausdrucks o) das zweite Glied vernachlässigt, so wird:

$$k'q' = \frac{5}{8}\frac{Q}{\cos\alpha};\quad kq = \left(-\frac{eq}{J}a + 5\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)\frac{Q}{8} \quad \ldots \ldots \quad \text{q)}.$$

Beispiel. Ein 20' langer hölzerner Balken von rechteckigem Querschnitt, 10" breit, 15" hoch, liege horizontal an beiden Enden auf. Das Gewicht, welches derselbe in der Mitte würde tragen können, wenn eine Spannung von höchstens 1200 Pfd. pro Quadratzoll zugelassen wird, ist:

$$2P = 4\,\frac{1200\,\frac{10\,(15)^2}{6}}{240}$$

(vergl. §. 10, 1) und §. 7), also $P = 3750$ Pfd.

Um diesen Balken zu verstärken, werde unter seiner Mitte (siehe *Fig. 46*) eine 10,5" hohe Stütze angebracht, von welcher schmiedeeiserne Schienen nach den Enden des Balkens hinlaufen. Es fragt sich, 1. wie gross der Querschnitt dieser Schienen gemacht werden müsse, damit ihre Spannung gerade dann = der als höchstens zulässig anzunehmenden von 12000 Pfd. pro Quadratzoll werde, wenn die Spannung der Holzfasern höchstens = 1200 Pfd. wird, damit also die Widerstandsfähigkeit beider Theile gleichzeitig so vollständig ausgenutzt werde, als es bei der prismatischen Form des Balkens überhaupt möglich ist; 2. um wie viel die Tragfähigkeit des Balkens durch diese Construction vergrössert wird.

Es ist hier

$$\sin\alpha = \frac{10}{\sqrt{100 + (1,5)^2}} = 0,9889$$

$$\cos\alpha = \frac{1,5}{\sqrt{100 + (1,5)^2}} = 0,1483$$

$$a = 120; \quad q = 150; \quad J = \frac{10\,(15)^3}{12} = 2812{,}5$$

$$E = 1800000; \quad E' = 29000000; \quad k = 1200; \quad k' = 12000.$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Gleichungen l) und m) liefert:

$$5{,}7437\,P - 12000\,q' = 17092$$

$$48\,P - 6{,}1295 \cdot 12000\,q' = 180000,$$

woraus

$$P = 5880 \text{ Pfd.}; \quad q' = 1{,}39 \text{ Quadratzoll}$$

sich ergiebt, während nach n) das wesentlich falsche Resultat:

$$P = 26990 \text{ Pfd.}; \quad q' = 15{,}17 \text{ Quadratzoll}$$

gefunden werde würde. —

Die einfache Regel, welche man sonst wohl angegeben und befolgt findet (M. Becker. Allgemeine Baukunde des Ingenieurs. 2. Aufl. §. 78), dass durch die in *Fig. 46* angedeutete Verstärkungsconstruction die Tragfähigkeit des Balkens um die Grösse

$$2\,k'\,q' \cdot \cos a$$

erhöht werde, muss aus 2 Gründen ein zu grosses Resultat liefern, weil erstlich auf die Compression keine Rücksicht genommen ist, die der Balken infolge der Anspannung der Schienen erfährt, und weil ihr zweitens die unrichtige Voraussetzung zu Grunde liegt, dass bei jedem beliebigen Verhältniss der Querschnitte q und q' der Balken und die Schienen gleichzeitig ihre höchstens zulässigen Spannungen erhalten. Selbst wenn man ersteren Umstand dadurch aufhöbe, dass man die Schienen nicht nach den Enden des Balkens, sondern nach festen, von dem Balken unabhängigen Punkten hinlaufen liesse, so würde doch die letztere Voraussetzung, in welcher der Querschnitt der Schienen nach Willkür gewählt wird (je grösser desto besser), immer dann einen wesentlichen Fehler verursachen, wenn man nicht diesen Querschnitt zufällig so trifft, dass die in Rede stehende Voraussetzung beinahe erfüllt wird.

§. 30. Krahne.

Ein Krahn ist bekanntlich eine Maschine, welche auf Bauplätzen, Werften, in Magazinen und Werkstätten vielfach gebraucht wird, um grössere Lasten auf mässige Höhen zu heben, dieselben in horizontaler Richtung zu versetzen und sie niederzulassen. Abgesehen von mancherlei Modificationen, besteht er im Wesentlichen aus folgenden Theilen: 1) einer verticalen drehbaren Säule, der Krahnsäule oder dem Krahnbaum; 2) einem damit verbundenen, horizontal oder schräg aufwärts gerichteten Arm oder sogenannten Ausleger; 3) einem Stück, welches mit dem Ausleger unter einem spitzen Winkel zusammentreffend und mit ihm zusammen den sogenannten Schnabel bildend, das äussere Ende des Auslegers mit der Krahnsäule verbindet und so den ersteren entweder als Strebe von unten oder als Zugstange von oben her stützt; 4) einer auch durch einen Flaschenzug zu vertretenden, von dem Ausleger getragenen Rolle nebst einer darüber gelegten Kette (oder einem Taue), deren herabhängendes Ende die Last trägt, während das andere Ende nach der Krahnsäule hingeführt ist; 5) einem Winde-Mechanismus zum Anholen oder Nachlassen der ge-

wöhnlich um eine Trommel gewundenen Kette, also zum Heben oder Niederlassen der Last. Die Drehung der Krahnsäule geschieht entweder direct mit der Hand oder sie kann auch durch besondere mechanische Mittel erleichtert werden.

Trotz der Uebereinstimmung in den vorbemerkten Theilen und allgemeinen Verhältnissen können sich die Krahne in mehrfacher Beziehung unterscheiden. Zunächst können sie entweder fest oder beweglich sein, je nachdem die Krahnsäule mit ihren Zapfen in am Boden oder am Gebäude festen Lagern drehbar ist, oder aber auf einem mit Rädern versehenen Gestelle drehbar ruht, wie es namentlich das Bedürfniss auf Bauplätzen häufig verlangt.

Hinsichtlich der Unterstützungsweise der Krahnsäule zerfallen die festen Krahne in solche, welche (wie namentlich in Magazinen, Giessereien und anderen überdachten Werkstätten) mit dem unteren Spurzapfen der Krahnsäule auf dem Boden stehen, mit dem oberen Zapfen aber in einem an der Mauer oder dem Gebälk des Gebäudes befestigten Lager sich drehen, und in solche, welche frei stehend (wie z. B. auf Werften) keine andere Stütze haben können, als den Boden selbst, der daher an seiner Oberfläche ein Halslager und auf dem Grunde einer ausgemauerten Grube ein Spurlager aufnimmt zur Unterstützung der in diese Vertiefung hineinreichenden Krahnsäule. Wenn jedoch die Localität im letzteren Falle eine solche Unterstützung tief unten im Fundamente nicht gestattet, so hilft man sich so, dass man einen verticalen Ständer auf demselben befestigt, auf dessen oberem Zapfen die hohle oder rahmförmige Krahnsäule mittelst einer Pfanne aufruht, während sie ihn an seinem unteren Ende mit einem Halsring umfasst; auch pflegt bei dieser Anordnung die Krahnsäule mit dem Schnabel ein Ganzes auszumachen, das entweder rahmförmig gegossen oder bogenförmig aus Eisenblech zusammengenietet ist.

Ferner ist das Lager der Rolle, über welche die die Last tragende Kette nach der Krahnsäule hin geführt ist, entweder am Ende des Auslegers (in der Spitze des Schnabels) fest, oder auf dem in diesem Falle horizontalen Ausleger beweglich, was namentlich mittelst eines Seiles ohne Ende oder mittelst Zahnstange, Trieb und Vorgelege geschehen kann und besonders in Giessereien zur Bewegung der grossen Formkasten, Modelle und Gussstücke üblich ist. Bei fester Rolle lässt sich der Schwerpunkt der Last nur in einer bestimmten verticalen Cylinderfläche, bei beweglicher Rolle aber innerhalb des Raumes zwischen zwei concentrischen solchen Cylinderflächen fortbewegen.

Die zum Aufwinden der Last, sowie zur Drehung des belasteten Krahns verwendete Betriebskraft endlich ist entweder die Kraft von Menschen, an Kurbeln wirksam, oder der natürliche, auch wohl künstlich erzeugte Wasserdruck, oder der Druck des Dampfes, wonach auch die Mechanismen etwas abweichend sind, durch welche das Anholen und Nachlassen der Kette vermittelt wird. —

Nach diesen Andeutungen mag im Folgenden die statische Berechnung der Haupttheile eines Krahns an einem Beispiele durchgeführt werden.

Die folgende *Fig. 47* (Seite 190) deutet durch einfache Linien die Construction eines festen und frei stehenden Krahns mit fest gelagerter Rolle an, welcher

durch Menschenkraft bewegt wird; er ist auf *Taf.* 2 specieller dargestellt und weiter unten ausführlicher beschrieben.

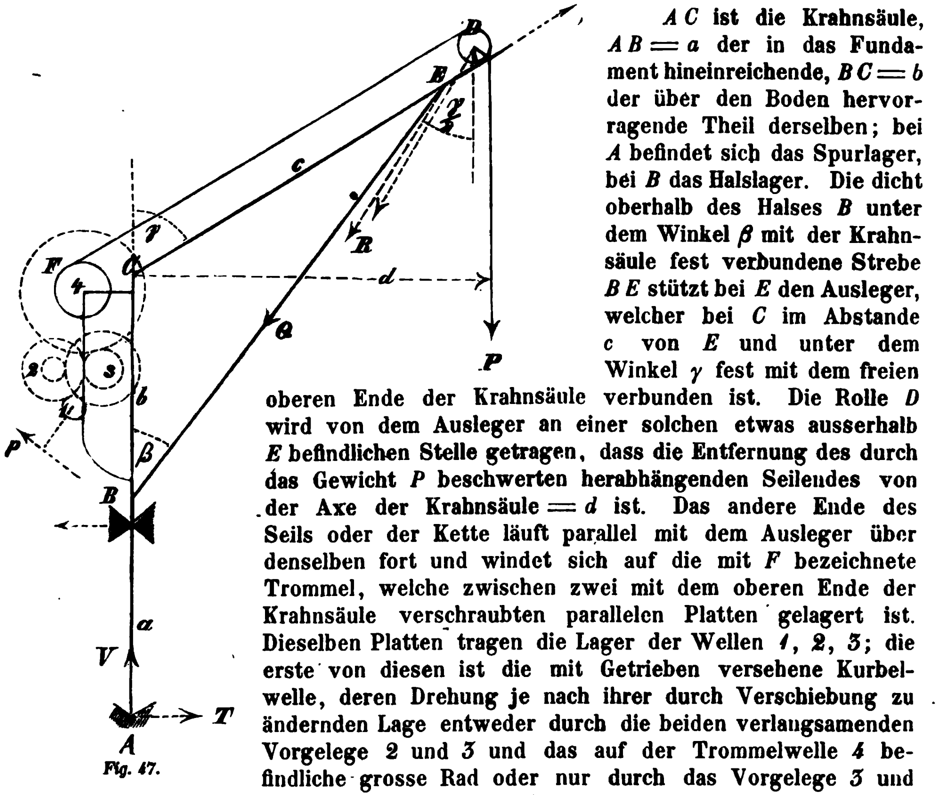


Fig. 47.

A C ist die Krahnsäule, $AB = a$ der in das Fundament hineinreichende, $BC = b$ der über den Boden hervorragende Theil derselben; bei *A* befindet sich das Spurlager, bei *B* das Halslager. Die dicht oberhalb des Halses *B* unter dem Winkel β mit der Krahnsäule fest verbundene Strebe *B E* stützt bei *E* den Ausleger, welcher bei *C* im Abstande *c* von *E* und unter dem Winkel γ fest mit dem freien oberen Ende der Krahnsäule verbunden ist. Die Rolle *D* wird von dem Ausleger an einer solchen etwas ausserhalb *E* befindlichen Stelle getragen, dass die Entfernung des durch das Gewicht *P* beschwerten herabhängenden Seilendes von der Axe der Krahnsäule $= d$ ist. Das andere Ende des Seils oder der Kette läuft parallel mit dem Ausleger über denselben fort und windet sich auf die mit *F* bezeichnete Trommel, welche zwischen zwei mit dem oberen Ende der Krahnsäule verschraubten parallelen Platten gelagert ist. Dieselben Platten tragen die Lager der Wellen *1*, *2*, *3*; die erste von diesen ist die mit Getrieben versehene Kurbelwelle, deren Drehung je nach ihrer durch Verschiebung zu ändernden Lage entweder durch die beiden verlangsamenden Vorgelege 2 und 3 und das auf der Trommelwelle 4 befindliche grosse Rad oder nur durch das Vorgelege 3 und jenes Rad auf die Trommelwelle übertragen wird.

Die Spannung des Seiles zwischen der Rolle *D* und der Aufwindetrommel *F* ist zwar beim Aufwinden der Last etwas grösser, beim Hinablassen etwas kleiner als *P*, nämlich um den Betrag der auf den Umfang der Rolle *D* reducirten Zapfenreibung und um denjenigen Betrag, welcher von der Steifheit des Seiles oder der Reibung der Kettenglieder herrührt; weil es aber für die praktische Ausführung nicht erforderlich ist, jedem dieser beiden Fälle eine besondere Betrachtung zu widmen, da der erwähnte Umstand immerhin nur von untergeordnetem Einfluss ist, so darf einem mittleren Zustand entsprechend die Spannung des Seils $DF = P$ gesetzt werden.

Die zwischen den Zähnen der Zahnräder stattfindenden Pressungen sind Kräfte, welche sich zu je zweien aufheben und keine Wirkung auf das Krahngestell *A B C E* ausüben. Ebenso verhält es sich mit den an den Enden der entgegengesetzt gerichteten Kurbeln der Welle *1* wirksamen, entgegengesetzt gerichteten gleichen Kräften *p*; und wenn dieselben auch nicht entgegengesetzt gerichtet und gleich wären, oder wenn etwa nur an einer einzigen Kurbel gearbeitet würde, so würden sie schon ihrer Kleinheit wegen nicht in Betracht kommen.

Setzen wir nun erstlich, wie es gewöhnlich zu geschehen pflegt, alle Theile als vollkommen starr voraus, wenigstens sofern es sich nicht sowohl um die Prüfung ihrer eigenen, durch ihre Elasticität allerdings wesentlich bedingten Wider-

standsfähigkeit, als vielmehr nur um die Art und Weise der Fortpflanzung der Schwerkraft P der angehängten Last bis zu den festen Punkten A und B handelt, so kann man sich diese Fortpflanzung folgendermassen vorstellen.

Die Schwerkraft P der angehängten Last und die als eine an der Rolle D ziehend wirkende Kraft P zu denkende Spannung des Seiles DF lassen sich zu einer Resultanten

$$R = 2 P \cos \frac{\gamma}{2}$$

zusammensetzen, welche durch den Mittelpunkt von D gehend den Winkel γ der Kräfte P halbirt, also mit der Verticalen den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ bildet. Diese Kraft R schneidet die Mittellinie CE des Auslegers in einem so wenig von E entfernten Punkte, dass, wenn sie durch eine in E selbst angreifende gleiche und gleich gerichtete Kraft R und durch ein Kräftepaar ersetzt wird, die biegende Wirkung des letzteren auf den Ausleger ausser Acht gelassen werden darf. Zerlegt man nun diese in E angreifende Kraft R, welche einen etwas kleineren Winkel mit der Verticalen zu bilden pflegt, als die Strebe EB, in die nach CE und EB gerichteten Componenten S und Q:

$$S = R \frac{\sin\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left[\pi - (\gamma - \beta)\right]} = P \left(\frac{\sin \beta}{\sin (\gamma - \beta)} - 1\right) \quad \ldots \ldots \text{a)}$$

$$Q = R \frac{\sin\left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left[\pi - (\gamma - \beta)\right]} = P \frac{\sin \gamma}{\sin (\gamma - \beta)} \quad \ldots \ldots \ldots \text{b)},$$

so nimmt erstere den Ausleger auf absolute, letztere die Strebe auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch. Die absolute Spannung S des Auslegers verbindet sich mit der absoluten Spannung des Seiles DF, die in dieser Beziehung als eine in F angreifende Kraft P von der Richtung FD zu denken ist, um den oberen Theil CB der Krahnsäule zugleich auf relative und absolute Festigkeit in Anspruch zu nehmen. Unmittelbar unterhalb B wird aber durch die hinzutretende Kraft Q diese Inanspruchnahme der Krahnsäule eine solche, dass sie mit ihrer aus relativer und rückwirkender zusammengesetzten Festigkeit Widerstand leisten muss gerade so, als ob sie unmittelbar die excentrisch im Abstande d von der Axe angreifende Kraft P zu tragen hätte (siehe §. 26). Das Halslager B und Spurlager A erfahren gleiche und entgegengesetzt gerichtete Pressungen T, die den in der Figur durch Pfeile angedeuteten Kräften entgegengesetzt sind und, wie leicht ersichtlich, die Grösse

$$T = P \frac{d}{a}$$

haben. Der Spurzapfen übt auf die Spurplatte den verticalen Druck

$$V = P + G$$

aus, wo G das Gewicht des unbelasteten Krahns bedeutet; und die diesen Pressungen bei A gleichen und entgegengesetzten Kräfte T und V nehmen den unteren Theil AB der Krahnsäule sowohl als auch den Zapfen auf (aus relativer und rückwirkender) zusammengesetzte Festigkeit in Anspruch. Streng genommen würde ausserdem das während der Drehung des Krahns auf Torsion wirkende

Moment der Zapfenreibung in Betracht zu ziehen sein, wenigstens für die Berechnung des Zapfens. Dieses Reibungsmoment ist

$$M = \mu T \varrho + \frac{2}{3} \mu (P + G) \varrho = \mu P \varrho \left[\frac{d}{a} + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{G}{P}\right)\right] \quad \ldots \text{c)},$$

wenn ϱ der Radius des Zapfens,

μ der Reibungscoefficient für seine Grundfläche sowohl als für seine Umfläche ist und wenn, um die ungünstigste Voraussetzung zu wählen, die Grundfläche als eben wie die Spurplatte vorausgesetzt wird, obgleich sie in Wirklichkeit etwas gewölbt zu sein pflegt, um das Moment dieser Reibung an der Grundfläche möglichst herabzuziehen.

Die Reibung im Halslager B, welche der verhältnissmässig bedeutenden Dicke des Halses wegen einen beträchtlichen Widerstand gegen die Drehung des Krahns verursachen würde, wird durch Frictionsrollen vermindert. Nimmt man an, dass hierdurch ihr Moment auf dasjenige der Reibung an der Umfläche des Zapfens A herabgezogen werden könne, so ist das ganze zur Drehung des Krahns erforderliche Kraftmoment, welches die Krahnsäule unmittelbar oberhalb des Halslagers nebenbei auf Torsion in Anspruch nimmt:

$$M' = 2 \mu P \varrho \left[\frac{d}{a} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{G}{P}\right)\right] \quad \ldots\ldots \text{d)}.$$

Was den Zapfen betrifft, so könnte seiner verhältnissmässig geringen Länge wegen auch diejenige Wirkung der Kraft T von nicht ganz unwesentlichem Einfluss sein, welche ein Abschneiden des Zapfens an der Stelle, wo er in die Krahnsäule hineintritt, zu bewirken strebt. —

Die Festigkeit der Krahnsäule wird hiernach in dem Querschnitt unmittelbar über dem Halslager, oder bei Vernachlässigung der von der Reibung herrührenden Torsion in demselben Maasse auch gleich unterhalb des Halslagers, am stärksten in Anspruch genommen. Bezeichnet q den Flächeninhalt dieses Querschnitts, B sein Trägheitsmoment in Beziehung auf die Biegungsaxe, e'' die grösste Entfernung der letzteren von einem Punkt des Querschnitts nach der Seite des Schnabels, e' ihre grösste Entfernung von irgend einem nach der anderen Seite hin gelegenen Punkte, so hat man bei Vernachlässigung der Torsion für die grösste in gedachtem Querschnitt hervorgerufene absolute und rückwirkende Spannung die Ausdrücke:

$$\sigma' = P\left(-\frac{1}{q} + \frac{de'}{B}\right); \quad \sigma'' = P\left(\frac{1}{q} + \frac{de''}{B}\right)$$

oder besser:

$$\sigma = -\frac{P + G}{q} + Pd\frac{e'}{B}; \quad \sigma'' = \frac{P + G}{q} + Pd\frac{e''}{B} \quad \ldots \text{e)},$$

wobei man, um sicher zu gehen und den durch die Vernachlässigung der Torsion begangenen Fehler einigermassen auszugleichen, für G das Gewicht des ganzen und nicht nur des oberhalb des Halses befindlichen Theils des Krahns setzen kann. — Wenn man sich vermittelst dieser beiden Gleichungen davon überzeugt hat, dass die Dimensionen der Krahnsäule an den gedachten Stellen genügend gross und auch möglichst so gewählt worden sind, dass die Spannungen σ' und σ'' das den zulässigen Grenzwerthen k' und k'' der absoluten und rückwirkenden Spannung des Materials entsprechende Verhältniss zu einander haben, so genügt es, diese Dimensionen nach beiden Enden der Krahnsäule, namentlich nach unten hin nach Schätzung abnehmen zu lassen, während der cylindrische Hals selbst aus constructiven Rück-

sichten so viel stärker gemacht wird, dass in ihm eine übermässige Spannung nicht zu befürchten steht.

Die in dem Ausleger und der Strebe hervorgerufenen specifischen Spannungen findet man einfach durch Division der nach a) und b) zu berechnenden totalen Spannungen durch die betreffenden Querschnitte.

Was den Spurzapfen betrifft, so findet man bei Vernachlässigung seiner Torsion die gefährlichste in ihm hervorgerufene, nämlich rückwirkende Spannung aus der zweiten der Gleichungen e), indem man darin

$$q = \pi \varrho^2; \quad B = \frac{\pi \varrho^4}{4}; \quad e'' = \varrho$$

und, unter l die Länge des Zapfens verstanden,

$$Tl = P\frac{dl}{a}$$

für Pd setzt. Das liefert

$$\sigma'' = \frac{P}{\pi \varrho^2}\left(1 + \frac{G}{P} + \frac{4dl}{a\varrho}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{f)}.$$

Zu einer genaueren Berechnung des Zapfens würde die Gleichung 3) des §. 23 dienen, indem man in derselben

$$P_x = -(P+G); \quad P_y = 0; \quad P_z = T$$
$$M_x = M; \quad M_y = -Tl; \quad M_z = 0$$
$$y = 0; \quad z = \varrho$$

setzt, da offenbar die grösste in irgend einem Punkte hervorgerufene Ausdehnung diejenige (negative Ausdehnung oder Verkürzung) ist, welche in dem nach der Richtung von T äussersten Punkte des Querschnitts an der Befestigungsstelle stattfindet. Demnach ist richtiger

$$\sigma'' = \frac{3}{8}\left(\frac{P+G}{q} + \frac{Tl}{q\frac{\varrho}{4}}\right) + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P+G}{q} + \frac{Tl}{q\frac{\varrho}{4}}\right)^2 + \left(\frac{M}{q\frac{\varrho}{4}}\right)^2 + \left(\frac{2T}{q}\right)^2}$$

oder mit Rücksicht auf die Ausdrücke von T und M:

$$\sigma'' = \frac{P}{8\pi\varrho^2}\left\{3\left(1 + \frac{G}{P} + \frac{4dl}{a\varrho}\right) + \right.$$
$$\left. + 5\sqrt{\left(1 + \frac{G}{P} + \frac{4dl}{a\varrho}\right)^2 + 16\mu^2\left[\frac{d}{a} + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{G}{P}\right)\right]^2 + \frac{4d^2}{a^2}}\right\} \quad \ldots \quad \text{g)}.$$

Durch das zweite Glied des Radicanden wird die Torsion, durch das dritte die Verschiebung der Querschnitte berücksichtigt. Setzt man dieselben = Null, so erhält man die Näherungsformel f). —

Beispiel. Bei der auf *Taf.* 2 gezeichneten Ausführung der hier im Allgemeinen berechneten Krahn-Construction ist

$$a = 395; \quad b = 280; \quad c = 450; \quad d = 410 \text{ Centimeter.}$$
$$P = 20000; \quad G = 10000 \text{ Kilogramm.}$$

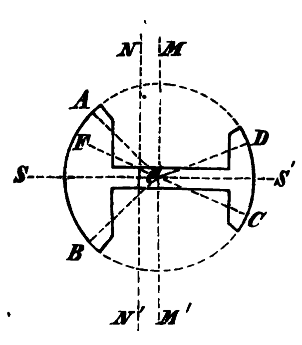


Fig. 48.

Der Querschnitt der **Krahnsäule** hat die nebenbei gezeichnete Form und kann näherungsweise aus zwei Kreissectoren AOB und COD von resp. 90^0 und 45^0 Mittelpunktswinkel bestehend angenommen werden, welche in der Weise sich gegenüber liegen, dass sie eine gemeinschaftliche Symmetrieaxe SS' haben. Wird der Radius des zugehörigen Kreises einstweilen mit r bezeichnet, so ist also

$$q = \frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{8} = \frac{3}{8}\pi r^2 = 1{,}1781 \cdot r^2.$$

Die Entfernung der auf der Symmetrieaxe senkrechten und durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Biegungsaxe NN' von der damit parallelen, durch den Mittelpunkt O gehenden Geraden MM' ist

$$= \frac{\frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{2}{3} r \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi r^2}{8} \cdot \frac{2}{3} r \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}}}{\frac{3}{8}\pi r^2} = 0{,}1836 \cdot r,$$

folglich

$$e' = 0{,}8164 \cdot r; \quad e'' = 1{,}1836 \cdot r.$$

Das Trägheitsmoment B in Beziehung auf NN' ergibt sich in bekannter Weise aus demjenigen in Beziehung auf MM' durch Subtraction des Productes aus q und dem Quadrat des so eben berechneten Abstandes zwischen MM' und NN'.

Ist AOB ein beliebiger Sector mit dem Mittelpunktswinkel α, F ein beliebiger Punkt desselben, $SOF = \varphi$, $OF = \varrho$, so ist sein Trägheitsmoment in Beziehung auf MM'

$$= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^r \varrho \, d\varphi \, d\varrho \, (\varrho \cos\varphi)^2 = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^r \varrho^3 \, d\varrho = \frac{r^4}{8}(\alpha + \sin\alpha).$$

Das Trägheitsmoment unseres zusammengesetzten Querschnitts in Beziehung auf MM' ist demnach

$$= \frac{r^4}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5079 \cdot r^4,$$

folglich

$$B = [0{,}5079 - 1{,}1781 \cdot (0{,}1836)^2]\, r^4 = 0{,}4682 \cdot r^4.$$

In der Nähe des Halslagers ist bei der Ausführung $r = 28$ Centimeter gemacht worden; hier ist also

$$q = 1{,}1781 \cdot (28)^2 = 923{,}7$$

$$\frac{B}{e'} = \frac{0{,}4682}{0{,}8164}(28)^3 = 12590$$

$$\frac{B}{e''} = \frac{0{,}4682}{1{,}1836}(28)^3 = 8684.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln e) findet man die grösste absolute und rückwirkende Spannung, welche bei voller Belastung in der Krahnsäule hervorgerufen wird:

$$\sigma' = -32,48 + 651,30 = 618,82 \text{ Kilogramm}$$
$$\sigma'' = 32,48 + 944,26 = 976,74 \quad „$$

Der Schnabel ist bei der in Rede stehenden Ausführung in Eichenholz construirt, und zwar besteht der Ausleger oder Arm aus zwei neben einander liegend verbundenen Balken von 40 Centimeter Höhe und 20 Centimeter Breite, so dass sie zusammen einen quadratischen Querschnitt von 40 Centimeter Seite, also 1600 Quadratcentimeter Inhalt liefern. Die Strebe hat einen rechteckigen Querschnitt von 32,5 Centimeter Höhe (in der Ebene von *Fig. 47* gemessen), die Breite ist nicht ersichtlich; es werde der günstigste Fall angenommen, dass sie derjenigen des Auslegers gleich, also der Querschnitt = 1300 Quadratcentimeter ist. Da ferner durch die Messung nahezu

$$\beta = 35^0; \quad \gamma = 54^0$$

gefunden wird, so ist bei dem belasteten Krahn die specifische absolute Spannung des Auslegers nach Gleichung a)

$$= \frac{20000}{1600}\left(\frac{\sin 35^0}{\sin 19^0} - 1\right) = 9,5 \text{ Kilogramm},$$

die specifische rückwirkende Spannung der Strebe nach Gleichung b)

$$= \frac{20000}{1300}\,\frac{\sin 54^0}{\sin 19^0} = 38,2 \text{ Kilogramm.}$$

Was den Spurzapfen betrifft, so scheint seine freie Länge l etwa = 20 Centimeter, sein halber Durchmesser oder $\varrho = 6,25$ Centimeter gemacht worden zu sein. Hieraus ergiebt sich nach f) die in ihm höchstens stattfindende Spannung

$$= 2410 \text{ Kilogramm},$$

die er, aus Stahl verfertigt, mit genügender Sicherheit verträgt. Nach der genaueren Formel g) findet man sie nur sehr wenig grösser, nämlich = 2438 Kilogramm, falls der Reibungscoefficient $= \frac{1}{4}$ angenommen wird. —

Der sehr geringe Werth, welcher sich dem Obigen zufolge für die Spannung des Auslegers herausstellt, scheint anzudeuten, dass der Constructeur bei der Berechnung des Krahnschnabels von anderen als den oben befolgten Principien ausgegangen ist, dass er vermuthlich auf dessen Biegung Rücksicht genommen hat, durch welche der Ausleger stärker als die Strebe in Anspruch genommen erscheinen mag, so dass dadurch vielleicht seine grösseren Dimensionen gerechtfertigt sind. Um dies zu untersuchen, mag die genauere Prüfung der Widerstandsfähigkeit einer dem in Rede stehenden Krahnschnabel entsprechenden Construction zunächst im Allgemeinen vorgenommen werden.

Die Verbindung der unteren Enden der beiden Theile des Schnabels mit der Krahnsäule ist eine durchaus feste, durch mehrfache Verschraubung als solche gesicherte und augenscheinlich als solche wesentlich für die Art und Weise, wie die Constructionstheile durch die Belastung in Anspruch genommen werden; die Verbindung zwischen Ausleger und Stütze bei E dagegen scheint der Art zu sein, dass sie eine geringe Veränderung der gegenseitigen Neigung beider Stücke wohl zulässt, also ohne wesentlichen Fehler als lose vorausgesetzt werden kann.

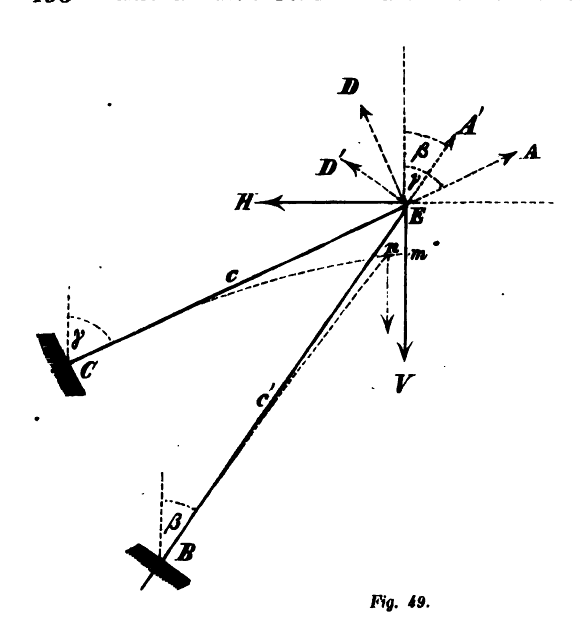


Fig. 49.

Es seien daher CE und BE, *Fig. 49*, zwei bei C und B befestigte, bei E lose verbundene prismatische Stücke; ihre Längen bezüglich c und c', ihre Querschnitte q und q', der gleiche Elasticitätsmodul in der Längsrichtung beider $= E$. Bei E seien sie angegriffen durch eine in die Ebene ihrer Mittellinien fallende Kraft, deren Componenten in verticaler und horizontaler Richtung bezüglich $= V$ und H sind.

Infolge der Biegung wird der Punkt E eine Verrückung erfahren, die aus der Senkung $Em = v$ und der horizontalen Verschiebung $mn = h$ nach der Richtung von H bestehend gedacht werden kann. Im Zusammenhang hiermit erfährt jedes der beiden Stücke CE und BE gleichzeitig eine gewisse Verkürzung α resp. α' und eine gewisse Durchbiegung δ resp. δ' (Verrückung des Endpunktes in einer auf CE resp. BE senkrechten Richtung). Sind β und γ die aus der Figur ersichtlichen Neigungswinkel der beiden Stücke gegen die Verticale, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Relationen zwischen den Grössen α, α', δ, δ' einerseits und β, γ, v, h andererseits:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= v\cos\gamma + h\sin\gamma; & \delta &= v\sin\gamma - h\cos\gamma \\ \alpha' &= v\cos\beta + h\sin\beta; & \delta' &= v\sin\beta - h\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{h)}.$$

Wegen der ihrer Compression widerstehenden Elasticität äussern nun CE und BE auf den Punkt E zwei Kräfte in den Richtungen CE und BE, welche mit A und A' bezeichnet sein mögen; ihre Ausdrücke sind nach §. 3, 4)

$$A = \frac{Eq}{c}\alpha; \quad A' = \frac{Eq'}{c'}\alpha' \quad \ldots\ldots\ldots \text{i)},$$

vorausgesetzt, dass diejenigen Bestandtheile von α und α', welche nicht sowohl die Verkürzungen der Mittellinien beider Stücke selbst, als vielmehr die mit ihren Biegungen verbundenen Verkürzungen ihrer Projectionen auf ihre Richtungen im unbelasteten Zustande betreffen, als unwesentlich ausser Acht gelassen werden. Die Biegung veranlasst aber unmittelbar zwei fernere Einwirkungen auf den Punkt E, nämlich die Kräfte D und D', senkrecht auf CE und BE gerichtet, entgegengesetzt den Biegungsrichtungen δ und δ'. Nach §. 8, 4) sind die Ausdrücke dieser Kräfte:

$$D = \frac{3EJ}{c^3}\delta; \quad D' = \frac{3EJ'}{c'^3}\delta' \quad \ldots\ldots\ldots \text{k)},$$

unter J und J' die Trägheitsmomente der Querschnitte beider Stücke in Beziehung auf die Biegungsaxe (durch den Schwerpunkt gehende, auf der Biegungsebene CEB senkrechten Gerade) verstanden.

Die Kräfte A, A', D, D', V, H halten sich am Punkte E Gleichgewicht. Also ist

$$A \sin\gamma + A' \sin\beta - D\cos\gamma - D'\cos\beta = H$$
$$A \cos\gamma + A' \cos\beta + D\sin\gamma + D'\sin\beta = V$$

oder wegen i) und k):

$$\frac{q\alpha}{c}\sin\gamma + \frac{q'\alpha'}{c'}\sin\beta - \frac{3J\delta}{c^3}\cos\gamma - \frac{3J'\delta'}{c'^3}\cos\beta = \frac{H}{E}$$
$$\frac{q\alpha}{c}\cos\gamma + \frac{q'\alpha'}{c'}\cos\beta + \frac{3J\delta}{c^3}\sin\gamma + \frac{3J'\delta'}{c'^3}\sin\beta = \frac{V}{E}$$

oder endlich, wenn für α, α', δ, δ' die Werthe nach h) substituirt werden:

$$\left(\frac{q}{c}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{q'}{c'}\sin\beta\cos\beta - \frac{3J}{c^3}\sin\gamma\cos\gamma - \frac{3J'}{c'^3}\sin\beta\cos\beta\right)v +$$
$$+\left(\frac{q}{c}\sin^2\gamma + \frac{q'}{c'}\sin^2\beta + \frac{3J}{c^3}\cos^2\gamma + \frac{3J'}{c'^3}\cos^2\beta\right)h = \frac{H}{E}$$

$$\left(\frac{q}{c}\cos^2\gamma + \frac{q'}{c'}\cos^2\beta + \frac{3J}{c^3}\sin^2\gamma + \frac{3J'}{c'^3}\sin^2\beta\right)v + \left(\frac{q}{c}\sin\gamma\cos\gamma +\right.$$
$$\left.+\frac{q'}{c'}\sin\beta\cos\beta - \frac{3J}{c^3}\sin\gamma\cos\gamma - \frac{3J'}{c'^3}\sin\beta\cos\beta\right)h = \frac{V}{E}.$$

Schreibt man zur Abkürzung die letzteren Gleichungen in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} Lv + Mh &= \frac{H}{E} \\ Nv + Lh &= \frac{V}{E} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{l}),$$

so findet man L, M, N aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2L &= \left(q - \frac{3J}{c^2}\right)\frac{\sin 2\gamma}{c} + \left(q' - \frac{3J'}{c'^2}\right)\frac{\sin 2\beta}{c'} \\ N + M &= \left(q + \frac{3J}{c^2}\right)\frac{1}{c} + \left(q' + \frac{3J'}{c'^2}\right)\frac{1}{c'} \\ N - M &= \left(q - \frac{3J}{c^2}\right)\frac{\cos 2\gamma}{c} + \left(q' - \frac{3J'}{c'^2}\right)\frac{\cos 2\beta}{c'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{m}).$$

Die Gleichungen l) liefern dann

$$v = \frac{1}{E}\,\frac{MV - LH}{MN - L^2}; \quad h = \frac{1}{E}\,\frac{NH - LV}{MN - L^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{n}),$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichungen h) findet man α, α', δ, δ'.

Die Bruchquerschnitte beider Stücke CE und BE sind die äussersten bei C und B. In der Voraussetzung, dass die Biegungsaxe vom äussersten Punkt des Querschnitts auf der einen und der andern Seite gleich weit (um e resp. e') entfernt ist, sind die vermöge der Biegung allein in beiden Punkten hervorgerufenen Spannungen gleich gross und zwar nach §. 7, 3)

$$= \frac{e}{J}\,cD \quad \text{resp.} \quad = \frac{e'}{J'}\,c'D'.$$

Weil aber die rückwirkenden Spannungen um $\frac{A}{q}$ resp. $\frac{A'}{q'}$ vergrössert, die absoluten um ebenso viel vermindert werden, so ist die grösste rückwirkende resp. absolute Spannung im Ausleger CE

$$= \frac{e}{J} c D \pm \frac{A}{q} = \frac{E}{c}\left(\frac{3e}{c}\delta \pm \alpha\right),$$

in der Strebe

$$= \frac{E}{c'}\left(\frac{3e'}{c'}\delta' \pm \alpha'\right) \quad \ldots\ldots \text{o)}.$$

Bei dem vorhin betrachteten Beispiel der Ausführung ist nun:

$$q = 40 \cdot 40 = 1600\,; \quad q' = 40 \cdot 32{,}5 = 1300$$

$$J = \frac{(40)^4}{12} = \frac{640000}{3}\,; \quad J' = \frac{40\,(32{,}5)^3}{12} = \frac{343270}{3}$$

$$e = 20 \qquad e' = 16{,}25$$

$$c = 430 \qquad c' = 550$$

$$\frac{3J}{c^2} = 3{,}5 \qquad \frac{3J'}{c'^2} = 1{,}1$$

$$\beta = 35^0 \qquad \gamma = 54^0$$

$$\sin\beta = 0{,}574 \qquad \sin\gamma = 0{,}809$$

$$\cos\beta = 0{,}819 \qquad \cos\gamma = 0{,}588$$

$$\sin 2\beta = 0{,}940 \qquad \sin 2\gamma = 0{,}951$$

$$\cos 2\beta = 0{,}342 \qquad \cos 2\gamma = -\,0{,}309\,;$$

mithin nach den Gleichungen m)

$$2L = 5{,}76\,; \quad N + M = 6{,}08\,; \quad N - M = -\,0{,}34,$$

woraus

$$L = 2{,}88\,; \quad M = 3{,}21\,; \quad N = 2{,}87$$

$$MN - L^2 = 0{,}918.$$

Ferner ist

$$H = P\sin\gamma = 16180$$

$$V = P(1 + \cos\gamma) = 31760,$$

folglich nach den Gleichungen n)

$$v = \frac{60295}{E}\,; \quad h = -\frac{49054}{E}$$

und dann nach den Gleichungen h)

$$E\alpha = -\,4231\,; \quad E\delta = 77622$$

$$E\alpha' = 21225\,; \quad E\delta' = 74785.$$

Endich ist nach o) für den Ausleger die grösste rückwirkende Spannung

$$= \frac{1}{430}\left(\frac{60}{430}\,77622 - 4231\right) = 15{,}3 \text{ Kilogramm}$$

und die grösste absolute Spannung

$$= \frac{1}{430}\left(\frac{60}{430}\,77622 + 4231\right) = 35{,}0 \text{ Kilogramm};$$

für die Strebe dagegen die grösste rückwirkende Spannung

$$= \frac{1}{550}\left(\frac{48{,}75}{550}\,74785 + 21225\right) = 50{,}6 \text{ Kilogramm}$$

und die grösste absolute Spannung

$$= \frac{1}{550}\left(\frac{48{,}75}{550}\,74785 - 21225\right) = -\ 26{,}5 \text{ Kilogramm}$$

oder vielmehr: es ist 26,5 Kilogramm die kleinste in der Strebe hervorgerufene rückwirkende Spannung.

Diese Rechnung rechtfertigt die bei der Ausführung gewählten Dimensionen zwar weit besser, als die frühere; indessen erscheint der Ausleger doch noch immer überflüssig stark sowohl an und für sich, als namentlich im Vergleich mit der Strebe. —

Behufs anderweitiger Anwendungen dürfte es nicht uninteressant sein, die Untersuchung der Widerstandsfähigkeit der in *Fig. 49* skizzirten Stabverbindung hier dahin zu verallgemeinern, dass die beiden Stäbe auch einen verschiedenen Elasticitätsmodul haben. Indem wir dabei zur besseren Uebersicht der Rechnung eine theilweise abgeänderte Bezeichnung wählen, seien (*Fig. 50*) BC und $B'C$ die bei B und B' befestigten, bei C lose verbundenen, an der Verbindungsstelle durch die verticale Kraft V und die horizontale Kraft H angegriffenen Stäbe;

a und a' ihre Längen,
q und q' ihre Querschnitte,
E und E' ihre Elasticitätsmodul,
J und J' die Trägheitsmomente ihrer Querschnitte,
β und β' ihre Neigungswinkel gegen die Verticale.

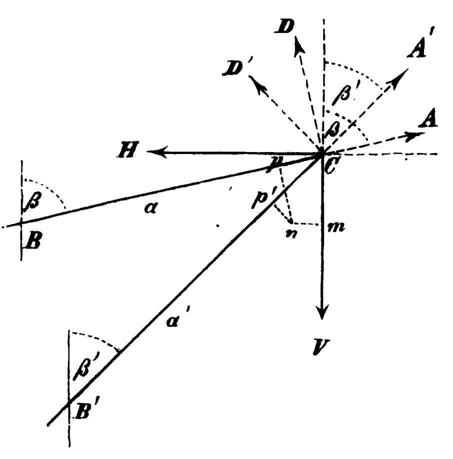


Fig. 50.

Alle diese Grössen werden als gegeben betrachtet.

Ferner seien $Cm = v$ und $mn = h$ die Verrückungen, welche der Punkt C infolge der Einwirkung der Kräfte V und H nach deren betreffenden Richtungen erfährt; p und p' die Projectionen des Punktes n auf BC und $B'C$;

$$Cp = \alpha;\quad np = \delta;\quad Cp' = \alpha';\quad np' = \delta'.$$

A und A' seien die durch die Verkürzungen α und α' bedingten Rückwirkungen der Stäbe in den Richtungen BC und $B'C$, D und D' die durch die Biegungen δ und δ' bedingten Rückwirkungen nach den auf BC und $B'C$ senkrechten Richtungen. Sind endlich noch $e_{,}$ und $e_{,,}$ für einen Querschnitt des Stabes BC die Entfernungen der Biegungsaxe vom obersten und untersten Punkt, $e'_{,}$ und $e'_{,,}$ die entsprechenden Entfernungen für den Stab $B'C$, $\sigma_{,}$ und $\sigma_{,,}$ die bei dem Stab BC,

$\sigma_{,}'$ und $\sigma_{,,}'$ die bei dem Stab $B'C$ diesen Punkten entsprechenden absoluten und rückwirkenden specifischen Spannungen, so besteht die Aufgabe darin, diese Spannungen

$$\sigma_{,} \text{ und } \sigma_{,,}; \quad \sigma_{,}' \text{ und } \sigma_{,,}'$$

für die Querschnitte bei B und B', wo sie offenbar am grössten sind, zu ermitteln. Wegen der vollkommenen Analogie der Bezeichnung können wir uns auf die Ermittelung von $\sigma_{,}$ und $\sigma_{,,}$ beschränken, weil alsdann zur Berechnung von $\sigma_{,}'$ und $\sigma_{,,}'$ weiter nichts als eine Vertauschung von

$$a \quad q \quad E \quad J \quad \beta \quad e_{,} \quad e_{,,}$$

mit

$$a' \quad q' \quad E' \quad J' \quad \beta' \quad e_{,}' \quad e_{,,}'$$

erforderlich ist.

Nun ist zunächst

$$\sigma_{,} = \frac{Da \cdot e_{,}}{J} - \frac{A}{q}; \quad \sigma_{,,} = \frac{Da \cdot e_{,,}}{J} + \frac{A}{q}$$

oder wegen

$$A = Eq\,\frac{\alpha}{a} \quad \text{und} \quad D = EJ\frac{3}{a^3}\,\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{p)}:$$

$$\sigma_{,} = \frac{E}{a}\left(\frac{3e_{,}}{a}\,\delta - \alpha\right); \quad \sigma_{,,} = \frac{E}{a}\left(\frac{3e_{,,}}{a}\,\delta + \alpha\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{q)}.$$

Hierdurch ist die Aufgabe auf die Berechnung von α und δ zurückgeführt, welche letztere Grössen wiederum durch das Gleichgewicht zwischen den Kräften

$$V, \quad H, \quad A, \quad A', \quad D, \quad D'$$

am Punkte C bedingt sind; die Bedingungsgleichungen dieses Gleichgewichts sind, falls zur Abkürzung

$$A \cos\beta + A' \cos\beta' = \Sigma A \cos\beta$$

etc. gesetzt wird:

$$\Sigma A \cos\beta + \Sigma D \sin\beta = V$$
$$\Sigma A \sin\beta - \Sigma D \cos\beta = H$$

oder wegen der Gleichungen p):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \frac{Eq}{a}\,\alpha \cos\beta + \Sigma \frac{3EJ}{a^3}\,\delta \sin\beta &= V \\ \Sigma \frac{Eq}{a}\,\alpha \sin\beta - \Sigma \frac{3EJ}{a^3}\,\delta \cos\beta &= H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{r)}.$$

Diese Gleichungen können unmittelbar zur Berechnung von α und δ nicht dienen, weil ausserdem die Unbekannten α' und δ' darin vorkommen; mittelbar führen sie aber insofern zum Ziel, als alle diese Grössen durch die beiden Unbekannten v und h und durch die gegebenen Stücke ausgedrückt werden können. Es ist nämlich

$$\alpha = v \cos\beta + h \sin\beta; \quad \delta = v \sin\beta - h \cos\beta \quad \ldots\ldots \quad \text{s)},$$

wodurch die Gleichungen r) übergehen in:

$$\left(\Sigma\frac{Eq}{a}\cos^2\beta + \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\sin^2\beta\right)v +$$
$$+ \left(\Sigma\frac{Eq}{a}\sin\beta\cos\beta - \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\sin\beta\cos\beta\right)h = V$$
$$\left(\Sigma\frac{Eq}{a}\sin\beta\cos\beta - \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\sin\beta\cos\beta\right)v +$$
$$+ \left(\Sigma\frac{Eq}{a}\sin^2\beta + \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\cos^2\beta\right)h = H$$

oder, wenn die vermittelst der gegebenen Stücke unmittelbar zu berechnenden Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{r} \Sigma\frac{Eq}{a}\cos^2\beta + \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\sin^2\beta = X \\ \Sigma\frac{Eq}{a}\sin\beta\cos\beta - \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\sin\beta\cos\beta = Y \\ \Sigma\frac{Eq}{a}\sin^2\beta + \Sigma\frac{3EJ}{a^3}\cos^2\beta = Z \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \text{t)}$$

gesetzt werden:

$$Xv + Yh = V; \quad Yv + Zh = H,$$

woraus

$$v = \frac{VZ - HY}{XZ - Y^2}; \quad h = \frac{HX - VY}{XZ - Y^2} \quad \ldots\ldots \text{u).}$$

Hiermit ist die Aufgabe erledigt: aus den gegebenen Stücken berechnet man X, Y, Z nach den Gleichungen t); dann v und h nach den Gleichungen u); dann α und δ nach den Gleichungen s); endlich $\sigma_{,}$ und $\sigma_{,,}$ nach den Gleichungen q).

Auch ist leicht einzusehen, dass, wenn es beliebig viele Stäbe sind, welche bei C lose mit einander verbunden, an ihren anderen Enden aber befestigt sind, die Rechnung sich in weiter Nichts ändert, als dass die in den Ausdrücken t) von X, Y, Z vorkommenden Summen aus mehr als zwei Summanden bestehen.

Endlich wäre es leicht, aus der hier betrachteten allgemeinen Aufgabe verschiedene Gruppen von besonderen Fällen zu entnehmen und die darauf bezüglichen Resultate mehr oder weniger vollständig entwickelt darzustellen, was aber hier zu weit führen würde. Es mag nur bemerkt werden, dass, wenn einer der Stäbe an seinem Ende nicht sowohl eingeklemmt (festgeschraubt etc.), sondern um einen festen Bolzen drehbar ist, wie z. B. bei einem Krahnschnabel die schmiedeeiserne Zugstange, welche den hölzernen oder gusseisernen Ausleger von oben her stützt, man nur nöthig hat, in den Gleichungen q) bezüglich auf einen solchen Stab δ = Null, und bei Berechnung der Ausdrücke X, Y, Z alle diejenigen auf einen solchen Stab bezüglichen Summanden = Null zu setzen, welche den Factor $\frac{3EJ}{a^3}$ enthalten.

Der im Obigen hinsichtlich seiner Tragfähigkeit berechnete Krahn ist auf *Taf.* 2, *Figg.* 1—5 im Maassstab = $1/_{60}$ nat. Gr. gezeichnet; er ist von Cavé für die Werkstätten der Eisenbahn von Paris nach Orléans construirt worden und von Armengaud ainé in seiner „*Publication industrielle des machines, outils et appareils etc.* Tom. I. 1841" mitgetheilt. Er dient zum Aufheben ganzer Locomotiven behufs der Revision und Reparatur derjenigen Theile des Mechanismus, welche unter dem Kessel liegen.

Krahngestell. — *A*, *Fig. 1* und *2*, ist die als einziges Stück gegossene eiserne Krahnsäule, deren Querschnitt, wie besonders aus dem unteren Theil von *Fig. 4* ersichtlich ist, im Allgemeinen die Form zweier durch einen Steg verbundener Kreissegmente hat, nach aussen stärker, nach innen, d. h. nach der Seite des Schnabels schwächer gehalten, den Eigenschaften des Gusseisens und der Art der Belastung entsprechend; von Strecke zu Strecke sind diese beiden segmentförmigen Flansche der Krahnsäule zur Verstärkung des Steges noch durch Rippen *a* verbunden. Der in ein schwach conisches Loch am unteren Ende der Krahnsäule eingesetzte stählerne Zapfen *b* ruht auf einer dicken Spurplatte *c* von gehärtetem Stahl, welche auf dem Boden des gusseisernen Spurkastens *B* durch einen vierkantigen Dübel festgehalten wird; der Spurkasten ist mit seiner viereckigen Platte in den grossen Werkstein eingelassen, welcher das Fundament von oben abschliesst, und ausserdem durch 4 Schraubenbolzen daran befestigt.

Die mit Werksteinen ausgemauerte cylindrische Grube, in welcher sich der untere Theil der Krahnsäule befindet, ist nebst letzterem in *Figg. 1* und *2* abgebrochen gezeichnet; oben und mit dem Erdboden abgeglichen ist in das Mauerwerk dieser Grube ein gusseiserner Kasten *C* eingelassen und durch Schraubenbolzen daran befestigt, welcher aus 2, durch einen cylindrischen und mit einigen Rippen versehenen Theil verbundenen, parallelen horizontalen Platten besteht. In diese Platten sind schwach conische Bolzen fest eingetrieben, um welche 6 gusseiserne Frictionsrollen *d* drehbar sind, die sich bei der Drehung des Krahns auf der cylindrischen Verstärkung *e* der Krahnsäule abwälzen; *f*, *Fig. 2*, ist eine mit einem Deckel verschliessbare Durchbrechung der oberen Platte des Kastens *C*, durch welche man in die Grube und zu dem Spurzapfen gelangen kann.

Der Ausleger *D* von Eichenholz und von quadratischem Querschnitt ist mit seinem unteren eingeschlitzten Ende in den Schuh *g* eingelassen, welchen das obere Ende der Krahnsäule bildet und welcher, wie *Fig. 3* erkennen lässt, aus einer oberen und unteren Platte und einem dieselben verbindenden verticalen Stege besteht, der den Schlitz des Auslegers ausfüllt; durch ein umgelegtes starkes schmiedeeisernes Band *h* und vermittelst 5 durchgezogener Schraubenbolzen ist die Festigkeit der Verbindung gesichert. Die Strebe *E*, gleichfalls aus Eichenholz, ist oben in den Ausleger eingezapft, unten vermittelst eines ähnlichen Schuhes g' wie letzterer und vermittelst 5 Schraubenbolzen mit der Krahnsäule fest verbunden.

Am oberen Ende des Auslegers sind die beiden Zapfenlager *i* der ausgekehlten Rolle *F* vermittelst ihrer etwas eingelassenen Grundplatten durch Schraubenbolzen befestigt; der Ausleger ist an dieser Stelle cylindrisch ausgearbeitet, um der etwas hinein tretenden Rolle *F* eben den nöthigen Spielraum zu gewähren, ausserdem aber zum Durchlassen der Kette in verticaler Richtung ganz durchgestemmt.

Bewegungsmechanismus. — Die Kette *G* wird durch die Führungsrollen *H*, deren Axen in den parallelen Wangen der auf dem Ausleger festgeschraubten gusseisernen Stühlchen *k* drehbar sind, in paralleler Richtung mit dem Ausleger nach der Trommel *J* hingeleitet, an deren Peripherie das Ende der Kette befestigt ist. Diese Trommel ist, wie der Durchschnitt *Fig. 5* zeigt, ein hohler gusseiserner Cylinder mit vortretenden Rändern, in dessen Böden durch Schlüsselkeile die eiserne Axe *K* befestigt ist; die Bronze-Lager der letzteren sind in die beiden parallelen gusseisernen Platten *L* eingelassen, welche mit der Krahnsäule bei *l* verschraubt sind und zugleich den übrigen Bewegungsmechanismus tragen.

Die Welle *K* trägt an einem Ende das grosse Rad *M* von 1,44 Meter Theilrissdurchmesser und 105 Zähnen von 0,1 Meter Breite, in welches das Trieb *m* von 0,238 Meter Durchmesser und 18 Zähnen eingreift. Auf der schmiedeeisernen Welle dieses Triebs befindet sich zwischen den Unterstützungsplatten *L* einerseits das Rad *N* von 0,9 Meter Durchmesser und 92 Zähnen, andererseits ein in den Zeichnungen nicht sichtbares Sperrrad; die Lager dieser Welle werden von den mit den Platten *L* im Ganzen gegossenen Consolen *p* getragen. Auf der Aussenseite der Platten *L* befinden sich 2 eben solche Console p', welche die Lager einer mit der eben genannten in gleicher Höhe liegenden und parallelen Welle tragen; auf dem einen Ende dieser Welle ist das dem Rade *N* ganz gleiche Rad *O*, auf dem andern das kleine Trieb *n* von 11 Zähnen befestigt, welches mit dem Rad *N* in Eingriff steht. In der Mitte unter den

beiden von den Consolen getragenen Vorgelegewellen befindet sich die Kurbelwelle *P*, welche aber nicht fest gelagert, sondern ihrer Länge nach verschiebbar ist. In ihrer Mitte hat sie 4 Bundringe, welche 3 Hälse von gleicher Breite zwischen sich bilden (*Fig. 2*); indem man die um den festen Verbindungsbolzen *q* der beiden Platten *L* drehbare, oben hakenförmig gestaltete Klinke *r* in den ersten, zweiten oder dritten Hals von der Linken zur Rechten, *Fig. 2*, gerechnet nach entsprechender Verschiebung der Kurbelwelle einlegt, wird letztere dadurch in solcher Weise arretirt, dass von den beiden auf ihr sitzenden gleichen Trieben 0 und 0′ von je 11 Zähnen entweder nur das erste in das Rad *O*, oder keins von beiden eingreift (welcher Fall in der Zeichnung dargestellt ist), oder das zweite in das Rad *N* eingreift. In der ersten Lage, bei welcher die Bewegung der Kurbelwelle durch Vermittelung des äusseren und des inneren Vorgeleges auf die Trommelwelle *K* übertragen wird, sind zu einer Umdrehung der letzteren

$$\frac{105 \cdot 92 \cdot 92}{18 \cdot 11 \cdot 11} = 408{,}04 \text{ Umdrehungen}$$

der Kurbelwelle erforderlich; in der dritten Lage dagegen, wo, während das äussere Vorgelege lose mitläuft, die Bewegung nur durch das innere übertragen wird, nur

$$\frac{105 \cdot 92}{18 \cdot 11} = 48{,}79 \text{ Umdrehungen.}$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass mit dem Rade *O* ein Bremsrad zusammengegossen ist, welches von einem durch den Hebel *s*, *Fig. 1*, zu regierenden eisernen Bremsband umfasst wird; diese Bremse dient theils zum Reguliren des Niedergehens der Last, theils zur Unterstützung des Sperrrades behufs grösserer Sicherheit, während die Last in gehobenem Zustand erhalten wird.

Alle in den *Figg. 1—5* auf *Taf. 2* eingeschriebenen Zahlen bedeuten Millimeter.

§. 31. Eiserne Dächer.

Die in der Substruction, d. h. abgesehen von der Bedeckung, aus Eisen construirten Dächer haben vor den hölzernen den Vortheil der längeren Dauer, der Feuersicherheit, des leichteren Aussehens und sind, da auch bei zunehmender Seltenheit guter Bauhölzer die grössere Billigkeit hölzerner Dächer immer weniger zu Gunsten der letzteren spricht, in neuerer Zeit besonders bei technischen Etablissements, Bahnhöfen, Güterschuppen und anderen grossen Bauten vorzugsweise in Anwendung gekommen.

Das die Dachbedeckung tragende Gerippe oder die Substruction dieser Dächer besteht zumeist aus Schmiedeeisen, und pflegt dann Gusseisen nur zu den kleineren Stützen und den zur Verbindung dienenden Theilen verwendet zu werden; zuweilen werden indess auch die Sparren aus Gusseisen gefertigt.

Die in den Hauptheilen schmiedeisernen Gespärre, welche hier allein berücksichtigt werden mögen, haben vorzugsweise zweierlei Grundformen, die in den *Figg. 51* und *54* (je zur Hälfte) skizzirt sind. Bei dem Gespärre *Fig. 51* ist *AB* der eine Sparren; *BC* ist eine von dem Verbindungspunkt *B* beider Sparren in der First herabhängende Hängestange, welche am unteren Ende einen Constructionstheil von geeigneter Form trägt, um die unteren Enden der die Sparren unterstützenden Streben B_1C aufzunehmen, sowie mit den Spannstangen *AC* verbunden zu werden, welche bei *A* entweder mit den Fussenden der Sparren selbst oder mit den zur Aufnahme der Sparrenfüsse dienenden Schuhen verbunden sind; diese Spannstangen sollen den Horizontalschub auf-

nehmen, welcher sonst auf die Frontmauern des Gebäudes oder (bei offenen Hallen) auf die das Dach tragenden Säulen ausgeübt werden würde. Dieses Gespärre eignet sich für Spannweiten bis zu etwa 30 Fuss; für grössere Spannweiten eignen sich die zusammengesetzteren Formen *Figg. 52* und *53*, welche aus der Grundform *Fig. 51* in leicht ersichtlicher Weise dadurch abgeleitet sind, dass auf jeder Seite des Gespärres eine Hängestange $B_1 C_1$ und eine Strebe $C_1 B_2$ oder 2 Hängestangen $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ mit zwei Streben $C_1 B_2$ und $C_2 B_3$ hinzugefügt sind.

Bei der Grundform *Fig. 54* sind die Enden D der Stützen CD durch Zugstangen BD und AD mit Kopf und Fuss der betreffenden Sparren, ausserdem durch die horizontale Spannstange DH unter sich verbunden. *Fig. 55* zeigt eine abgeleitete Construction für grössere Spannweiten, entstanden aus der vorigen durch Hinzufügung der kürzeren Stützen $C_1 U$ und $C_2 V$ und Zugstangen CU und CV. Was das System *Fig. 54* vorzugsweise charakterisirt und von dem Systeme *Fig. 51* unterscheidet, ist der Umstand, dass die Stützen auf den Sparren senkrecht stehen: ohne diese Bedingung würde *Fig. 51* nur als specieller Fall von *Fig. 54* erscheinen, entstanden durch Reduction der Spannstange auf die Länge = Null, wobei die Zugstange AD, *Fig. 54*, zur Spannstange AC, *Fig. 51*, werden, die Zugstange BD, *Fig. 54*, mit ihrer entsprechenden auf der anderen Seite aber zur Hängestange BC, *Fig. 51*, sich vereinigen würde.

Die Sparren pflegen bei diesen Constructionen aus gewalztem Eisen mit T-förmigem Querschnitt (*Fig. 56*) zu bestehen, der Flansch nach oben, der Steg (die Rippe) nach unten gekehrt; bei dem System *Fig. 51* und den daraus abgeleiteten Formen werden auch die Streben zweckmässig aus T-Eisen gemacht, während die Stützen bei dem System *Fig. 54* und seinen Ableitungen als gusseiserne Säulchen hergestellt zu werden pflegen. Die Hänge-, Spann- und Zugstangen, welche nur auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen werden, macht man aus gewalztem Rund- oder Flacheisen.

Die Art der Verbindung dieser Theile, welche übrigens mehrfacher Modificationen fähig ist, zeigen die *Figg. 6—10*, *Taf. 2*.

Fig. 6 zeigt den gusseisernen Schuh, in dessen Schlitz der Sparrenfuss eingelegt und durch einen Schraubenbolzen festgehalten ist; ausserdem ist die quadratisch auslaufende, übrigens runde Spannstange durch Keil und Gegenkeil darin befestigt. Letztere Verbindungsweise gestattet ein leichtes Reguliren der Spannung durch Anziehen oder Nachlassen der Keile, was, wenn die Spannstange gleichfalls durch einen Bolzen mit dem Schuh verbunden ist, wenn sie etwa mit den Augen ihres gabelförmigen Endes den Sparrenbolzen angreift, weniger einfach auch dadurch bewerkstelligt werden kann, dass man sie an irgend einer Stelle unterbricht, beide Enden mit entgegengesetzten Schraubengewinden versieht und durch eine Spannmutter wieder vereinigt. Diese Regulirung ist insofern wichtig, als es sich darum handelt, sowohl einen auswärts, als einen einwärts gerichteten Horizontalschub auf die Frontmauer möglichst zu vermeiden, die Spannung der Spannstange also weder zu klein, noch zu gross zu halten, was bei der grossen Veränderung der Spannung, welche einer kleinen Längenabweichung der Spannstange entspricht, ohne solche Vorkehrung nicht

zu erreichen sein würde. Anstatt mit dem Schuh wird die Spannstange auch wohl oberhalb des Schuhes unmittelbar mit dem Sparren verbunden, z. B. vermittelst zweier Platten, die einerseits den Steg des Sparrens, andererseits die in solchem Falle flache Spannstange zwischen sich fassen, indem sie mit ersterem durch einen Bolzen, mit letzterer durch Keile verbunden sind.

Fig. 7 zeigt die Verbindung der Sparrenköpfe eines Gespärres an der First vermittelst eines gusseisernen Kopfstücks, mit dessen geschlitzten Seitenlappen die eingelegten Rippen der beiden Sparren durch je einen Schraubenbolzen verbunden sind. Von unten ist die mittlere Hängestange in ein centrisches Loch dieses Kopfstücks eingesteckt und hängt an einem quer durchgesteckten Keil. Oben hat das Kopfstück 2 Lappen in der Richtung der Länge des Dachs, zwischen welche, durch Schraubenbolzen festgesalten, die Rippe der *T*-förmigen Firstschiene eingelegt ist, welche auf ihrem Flansch eine, zur Dichtung der Dachfirst mit Blei oder Blech überkappte, hölzerne Latte trägt. — Eine Abänderung erleidet diese Construction namentlich dadurch, dass nicht selten, insbesondere über Räumen, in welchen sich lästige oder schädliche Dämpfe und Gase entwickeln, das Dach mit einem Ventilationsaufsatz versehen wird, d. h. einem über der First des Hauptdaches in mässiger Entfernung hinlaufenden schmäleren Dache, welches den Dämpfen zur Seite einen Ausweg gestattet, indem das Hauptdach unter ihm ohne Bedeckung gelassen ist.

Bei der auf *Taf.* 2 dargestellten Construction trägt die First-Hängestange des Systems *Figg.* 51—53 an ihrem unteren, mit Schraubengewinde versehenen Ende 2 schmiedeeiserne Platten, *Fig.* 8, von oben und unten durch Muttern in einem für die Aufnahme der zwischen sie eintretenden Augen der Spannstangen geeigneten Abstand erhalten; die durch diese Augen hindurchgezogenen Schraubenbolzen fassen zugleich die Fussenden der Streben (resp. des ersten Strebenpaares), deren Flansche zu dem Ende umgebogen, während die Rippen schräg abgeschnitten sind. Die im Grundriss *Fig.* 8 angedeutete Verbindung besagter Platten der aufeinander folgenden Gespärre unter sich durch Stangen, welche parallel mit der First laufen, trägt zur grösseren Steifigkeit des ganzen Systems bei. Einfacher ist die Verbindung der Streben mit den Spannstangen und der First-Hängestange auszuführen, wenn letztere Stangen aus Flacheisen gemacht und auch die Streben an den Fussenden durch Weghauen der Flansche auf den flachen Steg reducirt werden: man kann dann alle diese (erforderlichen Falls durch zwischengelegte Blechscheiben) gleich dick zu machenden Theile einfach mit 2 von beiden Seiten gegengelegten Platten vernieten. Dasselbe gilt von der Verbindung der etwa vorhandenen zweiten und dritten Streben mit den entsprechenden Hänge- und Spannstangen: *Fig.* 10, *Taf.* 2; bei Anwendung von Rundeisen ist hier die Spannstange an der betreffenden Stelle in eine viereckige Form geschmiedet und zur Aufnahme der zugleich als Verbindungsbolzen dienenden Hängestange mit einem Auge versehen.

Fig. 9 endlich zeigt die Verbindung von Sparren und Strebe durch 2 Platten, welche von beiden Seiten mit der schräg abgeschnittenen Rippe der Strebe vernietet und mit derjenigen des Sparrens durch einen Schraubenbolzen verbunden sind, an welchen zugleich eine etwa vorhandene seitliche Hängestange

mit ihrem gegabelten Ende angehängt werden kann; besteht letztere aus Flacheisen, so kann sie einfacher zwischen die nach unten verlängerten Verbindungsplatten geschoben und durch Keile befestigt werden, welche eine Regulirung der Länge gestatten, wie es bei der durch *Fig. 10* dargestellten Construction in Rundeisen durch das Schraubengewinde am unteren Ende geschieht.

Bei dem System *Figg. 54* und *55* können die gusseisernen Säulchen, welche hier die Stelle der die Sparren unterstützenden Streben vertreten, oben 2 angegossene Lappen erhalten, welche die Rippe des Sparrens umfassen, während ein einziger Lappen am unteren Ende zwischen 2 parallele Platten eingesteckt ist, die zur Verbindung dieser Säulchen mit der Spann- und den Zugstangen vermittelst durchgesteckter Bolzen dienen. Bei der zusammengesetzten Construction *Fig. 55* kann man den die Sparrenrippe aufnehmenden Schlitz zwischen den oberen Lappen der Mittelsäule *CD* etwas in die Säule hinein sich fortsetzen lassen, um eine Platte hineinzulegen, welche an ihren hervortretenden Enden zu beiden Seiten der Säule mit Augen versehen und vermittelst durchgezogener Bolzen mit den gabelförmig geschlitzten und gleichfalls gelochten Enden der Zugstangen *CU* und *CV* verbunden wird.

Die Verbindung der parallel in gleichen Abständen aufgestellten Gespärre zu einem soliden Ganzen geschieht — ausser durch die fest gelagerten Schuhe der Sparrenfüsse, die erwähnte Firstschiene, die parallel darunter herlaufenden Verbindungsstangen (*Fig. 8*, Grundriss), sowie durch die das eigentliche Dach tragenden Dachlatten — auch noch durch Diagonalverstrebung mittelst sogenannter Windruthen, wodurch die Fuss- und Kopfenden der Sparren und der Streben, resp. Stützen, sowie auch bei Dächern mit Ventilationsaufsätzen die beiden Firste (des Hauptdachs und des Aufsatzes) kreuzweis verbunden werden.

Zur Deckung verwendet man entweder Schieferplatten, befestigt mittelst kupferner Nägel, die um die aus Winkeleisen bestehenden, auf den Sparren befestigten Dachlatten umgebogen werden; oder Eisenblech, eben oder wellenförmig, auf schmiedeisernen Latten oder auch auf einer untergelegten Holzschalung befestigt; seltener gusseiserne Platten, die dann durch Schrauben mit den Sparren verbunden werden; endlich Dachpappe auf Holzschalung.

Die Berechnung eines solchen Dachs besteht in der Aufgabe, die in den Haupttheilen der Substruction (den Sparren, Streben, resp. Stützen, Hänge-, Zug- und Spannstangen) unter der Einwirkung einer gegebenen Belastung stattfindenden Spannungen zu ermitteln, um danach die Querdimensionen dieser Theile der Bedingung gemäss festzustellen, dass ihre specifischen Spannungen höchstens = gegebenen Werthen sind.

Hinsichtlich der Belastung muss man dabei von gewissen erfahrungsmässigen Annahmen ausgehen. Diese Belastung besteht 1. aus dem Gewicht des eigentlichen Daches, d. h. des Deckungsmaterials, inclusive der zu seiner Befestigung auf den Sparren dienenden eisernen Latten, resp. der Holzschalung; 2. aus dem Gewicht der Substruction; 3. aus der zufälligen Belastung durch Schnee; 4. aus dem Druck des Windes.

Was die letztere belastende Kraft betrifft, welche nicht, wie die anderen, in verticaler Richtung wirkt, so pflegt man zur Vereinfachung der Berechnung

von ihrer horizontalen Componente zu abstrahiren; die verticale Maximalbelastung durch Schnee und Winddruck zusammen kann man für mittlere Gegenden etwa = 15 bis 20 Pfund pro Quadratfuss der Horizontalprojection der Dachfläche annehmen. Dass diese Maximalbelastung für die zwischen den üblichen Grenzen sich haltenden Dachneigungen nicht pro Quadratfuss der Dachfläche selbst, sondern ihrer Horizontalprojection gleich gross gerechnet wird, ist insofern nicht unangemessen, als durch den Winddruck ein steiles, durch die Schneebelastung ein flaches Dach mehr zu leiden hat.

Das Gewicht des eigentlichen Dachs ist nach der Eindeckungsart sehr verschieden und pro 1 Quadratfuss der Dachfläche selbst wie folgt anzunehmen:

bei	Wellenblech	auf eisernen Latten	zu	$3\frac{1}{2}$	Pfd.
„	Dachpappe	„ Holzschalung	„	4	„
„	ebenem Eisenblech	„ eisernen Latten	„	$4\frac{3}{4}$	„
„	„ „	„ Holzschalung	„	$6\frac{1}{4}$	„
„	Bedeckung mit Schieferplatten		„	10	„
„	„ „ gusseisernen Platten		„	14	„

Das Gewicht der Substruction ist genau genommen erst das Resultat der Rechnung; es kann aber vorläufig zu etwa 3—5 Pfd. pro Quadratfuss der Horizontalprojection des Dachs angenommen werden. Das sich ergebende wirkliche Gewicht ist hiervon stets so wenig verschieden, dass mit Rücksicht auf die Willkür bei Annahme der übrigen viel grösseren Belastungen eine Correction der durchgeführten Rechnung niemals erforderlich wird.

Ausser diesen Annahmen hinsichtlich der Belastung müssen noch gewisse Voraussetzungen zu Grunde gelegt werden, welche den Gleichgewichtszustand des belasteten Systems derart näher bestimmen, dass er ohne allzu grosse Weitläufigkeiten und doch in einer seinem wirklichen Zustand und den Anforderungen einer rationellen Praxis hinlänglich entsprechenden Weise der Rechnung unterworfen werden kann.

1. Die Spannung der Spannstangen wird so regulirt vorausgesetzt, dass sie den auswärts gerichteten Sparrenschub gerade aufhebt, ohne ihn in einen einwärts gerichteten zu verwandeln.

2. Die auf einen Sparren kommende Belastung (Gewicht des belasteten Daches zwischen denjenigen beiden verticalen Ebenen, welche in der Mitte zwischen dem betreffenden Sparren und den auf beiden Seiten benachbarten mit denselben parallel gelegt werden) ist der Hauptsache nach, nämlich abgesehen von dem untergeordneten Gewicht der Substruction, auf dem betreffenden Theil der Dachfläche gleichförmig vertheilt; hinsichtlich des Sparrens aber, welcher diese Belastung zunächst aufzunehmen hat, theilt sie sich bei der gewöhnlichen Eindeckung mittelst eiserner Latten in Componenten ab, die in den Kreuzungspunkten mit den Latten den Sparren angreifen. Um allgemeine Formeln zu erhalten, welche von der besonderen Anordnung der Dachlatten unabhängig sind, werde nun die Gesammtbelastung auch auf dem Sparren selbst gleichmässig vertheilt angenommen; diese Voraussetzung entspricht einer unendlich grossen Zahl von Dachlatten und kommt also der Wirklichkeit um so näher, je enger dieselben gelegt werden.

3. Zur Berechnung des Drucks, den der solcher Weise belastete Sparren auf die Endpunkte A, B und die Zwischenstützpunkte (Verbindungspunkte mit den Streben, resp. Stützen) $B_1\,B_2\,B_3$ (*Figg.* 51—53), resp. $C\,C_1\,C_2$ (*Figg.* 54 und 55) ausübt, werde vorausgesetzt, dass alle diese Stützpunkte genau in gerader Linie liegen. Diese Annahme verlangt eine Berechnung der auf dieselben ausgeübten Pressungen nach denjenigen Principien, welche in §. 15 für einen solchen mehrfach gestützten continuirlichen Träger auseinandergesetzt worden sind. Diese Berechnung würde zwar wesentlich leichter sein, wenn man sich dabei des in §. 29, Nr. 2, besprochenen Vereinfachungsmittels bedienen, also den Sparren aus einzelnen getrennten Theilen bestehend betrachten wollte, welche mit beiden Enden in den Stützpunkten lose aufliegen, eine Betrachtung, welche im Erfolg auf die Annahme hinausläuft, dass die mittleren Stützpunkte des continuirlichen Sparrens bis zum Verschwinden der Spannungsmomente in seinen Querschnitten bei denselben unter die gerade Verbindungslinie AB der Endpunkte hinabgedrückt werden und folglich die ganze Dachfläche gebogen, nach Aussen concav wird. Wäre die dazu erforderliche Senkung der mittleren Stützpunkte nur so gering, dass sie mit den unvermeidlichen Fehlern beim Montiren des Gespärres vergleichbar ist, so würde gegen jene die Rechnung vereinfachende Voraussetzung kein wesentlicher Einwand gemacht werden können; eine nähere Untersuchung lässt aber erkennen, dass schon bei einem mittleren Stützpunkt (*Figg.* 51 und 54) die erforderliche Senkung desselben bei den üblichen Verhältnissen solcher Gespärre bis etwa 1 Zoll betrüge, eine Abweichung, welche zu gross erscheint, um sie als stattfindend annehmen zu dürfen.

Die weitere Berechnung der Dachconstruction beruht nun einfach auf dem wiederholten Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen von Kräften, welche in einer Ebene liegend an demselben Punkt angreifen, nämlich der äusseren und inneren Kräfte (Belastungen und Spannungen) an den Verbindungspunkten der Constructionstheile. Dabei hat man von denjenigen Punkten auszugehen, wo die äusseren Kräfte angreifen, also von den End- und Zwischenstützpunkten der Sparren. Ist Q die Gesammtbelastung eines Sparrens AB, α sein Neigungswinkel gegen den Horizont, so zerfällt Q zunächst in die Componente $Q \sin\alpha$, welche eine vom Kopf B bis zum Fuss A des Sparrens stetig zunehmende (im Querschnitt gleichmässig vertheilte) Pressung desselben verursacht, und in die Componente $Q \cos\alpha$, welche den Sparren auf Biegung in Anspruch nimmt und seine Stützpunkte in auf AB normalen Richtungen drückt. Wenn ein solcher Normaldruck nicht unmittelbar durch eine senkrecht mit dem Sparren verbundene Stütze (System *Figg.* 54 und 55) fortgepflanzt werden kann, so zerlegt er sich in Componenten nach der Richtung BA des Sparrens und nach der Richtung der schiefwinklig mit demselben zusammenstossenden Strebe (System *Figg.* 51—53), aus welchem Grunde hier die Pressung des Sparrens von B bis A nur innerhalb jeder einzelnen sich frei tragenden Abtheilung stetig, bei den Zwischenstützpunkten $B_1\,B_2\ldots$ aber sprungweise zunimmt.

Sei N ein beliebiger Stützpunkt des Sparrens, $n\,Q \cos\alpha$ der Normaldruck auf denselben, so kann der nur von der verhältnissmässigen Grösse der Sparrenabtheilungen abhängige Coefficient n nach §. 15 berechnet werden, indem

man den Sparren in horizontaler Lage mit $Q \cos \alpha$ gleichmässig belastet sich vorstellt. Denkt man diesen Normaldruck in eine verticale und eine nach AB gerichtete Componente zerlegt, so soll erstere in der Folge stets mit dem Buchstaben des betreffenden Stützpunkts, hier also mit N, bezeichnet werden; die nach AB gerichtete Componente ist dann $= N \sin \alpha$, der Normaldruck $= N \cos \alpha$. Folglich ist der Verticaldruck $N = nQ$ und kann auch direct berechnet werden, indem man statt des Sparrens einen horizontal auf gleich hohen Stützen liegenden und gleichmässig mit Q belasteten Träger betrachtet, bei welchem die Abstände der Stützpunkte dasselbe Verhältniss zu einander haben, wie beim wirklichen Sparren, z. B. den horizontalen Projectionen der letzteren gleich sind.

Bei Anwendung vorstehender Annahmen und Principien gelangt man für die einzelnen Systeme *Figg. 51—55* zu folgenden Resultaten.

I. System *Fig. 51.*

Es sei

h die Höhe des Punktes B über der Horizontalen AD,
h_1 „ „ „ „ B_1 „ „ „ „
d „ „ „ „ C „ „ „ „ ;
r die Länge, R die Spannung der Spannstange AC,
t „ „ T „ Pressung „ Strebe B_1C_1
s „ „ S „ Spannung „ Hängestange BC;

dann ist:

$$R = (Q - A)\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots 1)$$

$$T = B_1 \frac{t}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

$$\frac{1}{2} S = T \frac{h_1}{t} + B \frac{d}{s} = B_1 \frac{h_1}{s} + B \frac{d}{s} \ldots 3).$$

Fig. 51.

Ist $AB_1 = B_1B$, so wird

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} B_1 \frac{h}{s} + B \frac{d}{s} \quad \ldots\ldots\ldots 3a)$$

während die Ausdrücke von R und T unverändert bleiben.

II. System *Fig. 52.*

Während h h_1 d r t s T S ihre sub I. angegebenen Bedeutungen beibehalten, sei noch

R die Spannung des Stücks C_1C der Spannstange,
R_1 „ „ „ „ AC_1 „ „
t_1 die Länge, T_1 die Pressung der Strebe B_2C_1,
s_1 „ „ S_1 „ Spannung „ Hängestange B_1C_1;
$s_2 = B_2C_2$; $c_1 = C_2C_1$.

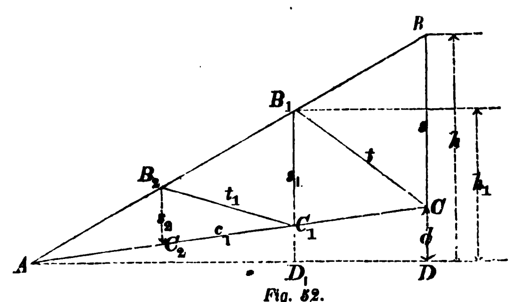


Fig. 52.

Dann findet man:

$$R_1 = (Q - A)\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

$$T_1 = B_2 \frac{t_1}{s_1} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

$$S_1 = T_1 \frac{s_2}{t_1} = B_2 \frac{s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

$$R = R_1 - T_1 \frac{c_1}{t_1} = \left(Q - A - B_2 \frac{s_1 - s_2}{s_1}\right)\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

$$T = (S_1 + B_1)\frac{t}{s} = \left(B_2 \frac{s_2}{s_1} + B_1\right)\frac{t}{s} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

$$\frac{1}{2} S = T \frac{h_1}{t} + B \frac{d}{s} = \left(B_2 \frac{s_2}{s_1} + B_1\right)\frac{h_1}{s} + B \frac{d}{s} \quad \ldots\ldots \quad 9).$$

Bei gleichen Sparrenabtheilungen $AB_2 = B_2 B_1 = B_1 B$ wird:

$$T_1 = \frac{3}{2} B_2 \frac{t_1}{s} \quad \ldots\ldots \quad 5\text{ a)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} B_2 \quad \ldots\ldots \quad 6\text{ a)}$$

$$R = \left(Q - A - \frac{1}{2} B_2\right)\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots \quad 7\text{ a)}$$

$$T = \frac{1}{2}(B_2 + 2B_1)\frac{t}{s} \quad \ldots\ldots \quad 8\text{ a)}$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{3}(B_2 + 2B_1)\frac{h}{s} + B \frac{d}{s} \quad \ldots\ldots \quad 9\text{ a)}.$$

III. System *Fig. 53.*

Unter Beibehaltung der sub I. und II. für die Buchstaben

$$h\ h_1\ d;\quad r\ t\ s\ t_1\ s_1\ s_2\ c_1;\quad R\ T\ S\ T_1\ S_1$$

festgestellten Bedeutungen sind noch

R_1 die Spannung des Stücks $C_2 C_1$ der Spannstange,
R_2 „ „ „ „ AC_2 „ „ ,
t_2 die Länge, T_2 die Pressung der Strebe $B_3 C_2$,
S_2 die Spannung der Hängestange $B_2 C_2 = s_2$;
$s_3 = B_3 C_3$; $c_2 = C_3 C_2$.

Dann ist:

$$R_2 = (Q - A)\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

$$T_2 = B_3 \frac{t_2}{s_2} \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

$$S_2 = T_2 \frac{s_3}{t_2} \quad \ldots \ldots \quad 12)$$

$$R_1 = R_2 - T_2 \frac{c_2}{t_2} \quad \ldots \ldots \quad 13)$$

$$T_1 = (S_2 + B_2) \frac{t_1}{s_2} \quad \ldots \ldots \quad 14)$$

$$S_1 = T_1 \frac{s_2}{t_1} \quad \ldots \ldots \quad 15)$$

$$R = R_1 - T_1 \frac{c_1}{t_1} \quad \ldots \ldots \quad 16)$$

$$T = (S_1 + B_1) \frac{t}{s} \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

$$\frac{1}{2} S = T \frac{h_1}{t} + B \frac{d}{s} \quad \ldots \ldots \quad 18),$$

worin man nur die successiven Substitutionen auszuführen braucht, um die 9 Grössen R R_1 R_2 T T_1 T_2 S S_1 S_2 durch die Dimensionen der Theile des Gespärres und die verticalen Pressungen A B B_1 B_2 B_3 auf die Stützpunkte des Sparrens, deren Summe $= Q$ ist, ausgedrückt zu erhalten.

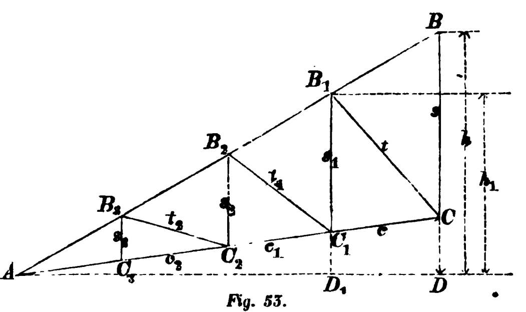


Fig. 53.

Sind die Sparrenabtheilungen von gleicher Länge:

$$A B_3 = B_3 B_2 = B_2 B_1 = B_1 B,$$

so findet man:

$$T_2 = 2 B_3 \frac{t_2}{s} \quad \ldots \ldots \quad 11\text{a})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} B_3 \quad \ldots \ldots \quad 12\text{a})$$

$$R = \left(Q - A - \frac{1}{2} B_3\right) \frac{r}{s} \quad \ldots \ldots \quad 13\text{a})$$

$$T_1 = \frac{2}{3} (B_3 + 2 B_2) \frac{t_1}{s} \quad \ldots \ldots \quad 14\text{a})$$

$$S_1 = \frac{1}{3} (B_3 + 2 B_2) \quad \ldots \ldots \quad 15\text{a})$$

$$R = \left[Q - A - \frac{1}{3} (2 B_3 + B_2)\right] \frac{r}{s} \quad \ldots \ldots \quad 16\text{a})$$

$$T = \frac{1}{3}(B_3 + 2B_2 + 3B_1)\frac{t}{s} \quad \ldots \quad 17\text{a)}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4}(B_3 + 2B_2 + 3B_1)\frac{h}{s} + B\frac{d}{s} \quad \ldots \quad 18\text{a).}$$

IV. System *Fig. 54.* — Bedeutet

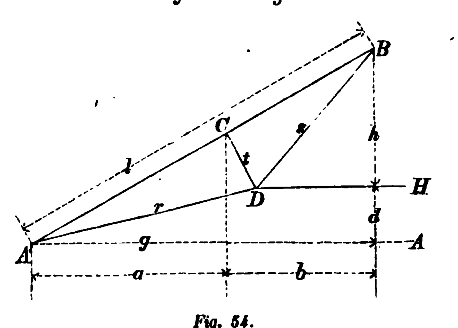


Fig. 54.

l die Länge des Sparrens,
g die Horizontalprojection derselben,
a „ „ des Stücks AC,
b „ „ „ „ BC;
h die Höhe des Punktes B über der Spannstange DH,
d die Höhe der Spannstange über der Horizontalen AA';
r die Länge, R die Spannung der Zugstange AD,
t die Länge, T die Pressung der Stütze CD,
s „ „ , S „ Spannung „ Zugstange BD,
H die Spannung der Spannstange DH;

so ist:

$$R = (Q - A)\frac{gr}{lt} \quad \ldots \quad 19)$$

$$T = C\frac{g}{l} \quad \ldots \quad 20)$$

$$H = \left(R\frac{t}{r} - T\frac{b}{g}\right)\frac{l}{h} = \left(C\frac{a}{g} + B\right)\frac{g}{h} \quad \ldots \quad 21)$$

$$S = \left(T\frac{a}{g} + H\frac{d}{l}\right)\frac{s}{t} = \left[C\frac{a}{l} + \left(C\frac{a}{g} + B\right)\frac{gd}{lh}\right]\frac{s}{t} \quad \ldots \quad 22).$$

Ist C die Mitte von AB, so wird:

$$H = \frac{1}{2}(C + 2B)\frac{g}{h} \quad \ldots \quad 21\text{a)}$$

$$S = \frac{1}{2}\left[C + (C + 2B)\frac{d}{h}\right]\frac{gr}{lt} \quad \ldots \quad 22\text{a).}$$

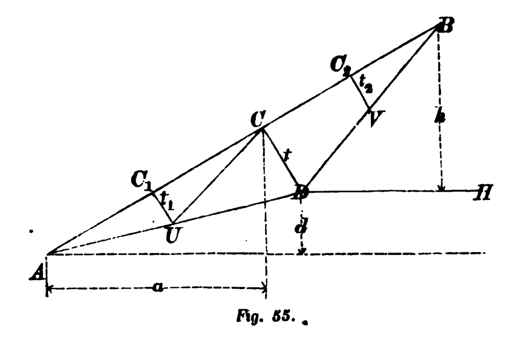


Fig. 55.

V. System *Fig. 55.* — Im Uebrigen unter Beibehaltung der Bezeichnungen sub IV sei

R die Spannung in UD;
R_1 „ „ „ AU;
S „ „ „ DV;
S_1 „ „ „ VB;
U „ „ „ CU;
V „ „ „ CV;

ferner sei C_1 die Mitte von AC,
C_2 „ „ „ BC,

während AC und BC im Allgemeinen verschieden sind. Man findet

$$T = \frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{g}{l} \quad \text{. . . . . 23)}$$

$$T_1 = C_1\frac{g}{l} \quad \text{. . . . . 24)}$$

$$T_2 = C_2\frac{g}{l} \quad \text{. . . . . 25)}$$

$$U = \frac{1}{2}C_1\frac{gr}{lt} \quad \text{. . . . . 26)}$$

$$V = \frac{1}{2}C_2\frac{gs}{lt} \quad \text{. . . . . 27)}$$

$$R_1 = (Q - A)\frac{gr}{lt} \quad \text{. . . . . 28)}$$

$$R = \left(Q - A - \frac{1}{2}C_1\right)\frac{gr}{lt} \quad \text{. . . . . 29)}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{a}{l} + \left[\frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{a}{g} + \frac{1}{2}C_2 + B\right]\frac{gd}{lh}\right\}\frac{s}{t} \quad \text{30)}$$

$$S_1 = S + \frac{1}{2}C_2\frac{gs}{lt} \quad \text{. . . . . 31)}$$

$$H = \left[\frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{a}{g} + \frac{1}{2}C_2 + B\right]\frac{g}{h} \quad \text{. . . 32).}$$

Wenn auch $AC = CB$ ist, so wird

$$S = \frac{1}{4}\left[C_1 + 2C + C_2 + (C_1 + 2C + 3C_2 + 4B)\frac{d}{h}\right]\frac{gr}{lt} \quad \text{. . 30a)}$$

$$H = \frac{1}{4}(C_1 + 2C + 3C_2 + 4B)\frac{g}{h} \quad \text{. . . . . 32a).}$$

Die vorstehenden Formeln setzen in den Stand, diejenigen Spannungen, welche in den zur Unterstützung des Sparrens und den zur Aufnahme des Sparrenschubes dienenden Constructionstheilen stattfinden, ohne Weiteres zu berechnen, falls die Verticaldrucke auf die Unterstützungspunkte des Sparrens bekannt sind. Was aber die Berechnung des Sparrens selbst betrifft, welcher auf zusammengesetzte Festigkeit in Anspruch genommen wird, so findet man, dass das durch seine Biegung bedingte Spannungsmoment stets in dem Querschnitt über der ersten Mittelstütze (vom Fusspunkt A aus gerechnet) am grössten, folglich die durch Biegung bedingte specifische Spannung im tiefsten Punkt dieses Querschnitts (am Ende des Steges oder der Rippe) am grössten ist. Zudem ist diese grösste specifische Spannung eine rückwirkende Spannung oder Pressung, und da im Sparren ausserdem noch eine von der Biegung unab-

hängige, vom Kopf zum Fuss wachsende Pressung stattfindet, so ist ersichtlich, dass die grösste resultirende Spannung eine rückwirkende ist und im tiefsten Punkt eines etwas unterhalb des vorbezeichneten gelegenen Querschnitts stattfindet, für welchen jedoch immer jener Querschnitt selbst gesetzt werden darf. Bezeichnet daselbst

M das Spannungsmoment,
P die von der Biegung unabhängige Pressung des Sparrens,
J sein Trägheitsmoment in Beziehung auf die Biegungsaxe,
q seinen Querschnitt,
e die Entfernung der Biegungsaxe vom äussersten Punkt des Steges,

so ist jene grösste, mithin für die Wahl der Querdimensionen des Sparrens massgebende, resultirende Pressung:

$$\sigma = \frac{Me}{J} + \frac{P}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33),$$

worin bei dem System *Figg. 51—53:*

$$P = (Q-A)\frac{l}{s} - (W-A)\frac{h}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34),$$

bei dem System *Figg. 54* und *55* dagegen

$$P = (Q-A)\frac{a}{t} + (Q-W)\frac{h+d}{l} \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

zu setzen ist, falls W die Belastung der untersten Sparrenabtheilung bedeutet.

Die Berechnung von $\frac{J}{e}$ in Gleichung 33) geschieht nach der betreffenden Formel in §. 7. Eine angemessene und häufig vorkommende T-Form des Sparrenquerschnitts ist die nebenstehend (*Fig. 56*) skizzirte; für dieselbe ist

$$q = \frac{11}{36}h^2; \quad \frac{J}{e} = 0{,}0397\,h^3 \quad \ldots \quad 36).$$

Fig. 56.

Schliesslich sind noch die nach §. 15 zu berechnenden Werthe von M, sowie der Verticalpressungen der Sparren auf ihre Stützpunkte, d. i. der Grössen $A\,B\,B_1\,B_2\,B_3$ bei *Figg. 51—53*, $A\,B\,C\,C_1\,C_2$ bei *Figg. 54* und *55* anzugeben. Dabei ist der Umstand von wesentlichem Einfluss, ob die Enden A und B des Sparrens lose oder fest verbunden sind. Das Fussende A freilich pflegt stets lose (durch einen einzigen Bolzen) mit dem Mauerstühlchen verbunden zu sein; das Kopfende B hingegen findet man häufig auch fest (durch mehrere Bolzen) verbunden, und muss in diesem Falle der Sparren so betrachtet werden, als ob er die Hälfte eines auf symmetrisch angeordneten Stützen ruhenden Trägers wäre in der Weise, dass B die Mittelstütze ist. In der Regel sind die einzelnen Abtheilungen des Sparrens gleich gross oder doch nur so wenig verschieden, dass man ohne wesentlichen Fehler ihre Differenzen bei der Rechnung gleichmässig vertheilen darf; unter dieser Voraussetzung sind die Resultate der Rechnung folgende:

	System *Figg.* 51 u. 54.		System *Fig.* 52.		System *Figg.* 53 u. 55.	
	B lose verb.	*B* fest verb.	*B* lose verb.	*B* fest verb.	*B* lose verb.	*B* fest verb.
$M =$	0,125	0,1071	0,1	0,1058	0,1071	0,1057
$A =$	0,375	0,3929	0,4	0,3942	0,3929	0,3943
$B_3\,(C_1) =$	—	—	—	—	1,1429	1,1340
$B_2\,(C) =$	1,25	1,1429	1,1	1,1346	0,9286	0,9629
$B_1\,(C_2) =$	1,25	1,1429	1,1	0,9615	1,1429	1,0103
$B =$	0,375	0,4643	0,4	0,5096	0,3929	0,4974

Hierbei sind die für M angegebenen Zahlen mit pa^2, die für die Verticalpressungen angegebenen Zahlen mit pa zu multipliciren, falls

a die Länge der Horizontalprojection einer Sparrenabtheilung,

p die Gesammtbelastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection bedeutet.

In Gemässheit der oben sub 1. gemachten Voraussetzung besteht die Reaction der Frontmauer oder Säule, welche bei A das Gespärre unterstützt, in allen Fällen nur in der verticalen Kraft Q. Was nun

1. das System *Fig.* 51.

betrifft, so besteht bei A Gleichgewicht zwischen

der vertical aufwärts gerichteten Kraft Q,

der nach AC gerichteten Kraft R,

der nach Am gerichteten Pressung des Sparrens

und dem nach An gerichteten Normaldruck $A \cos \alpha$ des Sparrens.

Zerlegt man R und $A \cos \alpha$ nach den Richtungen Av und AB, so erhält man folgende Componenten (*Fig.* 57):

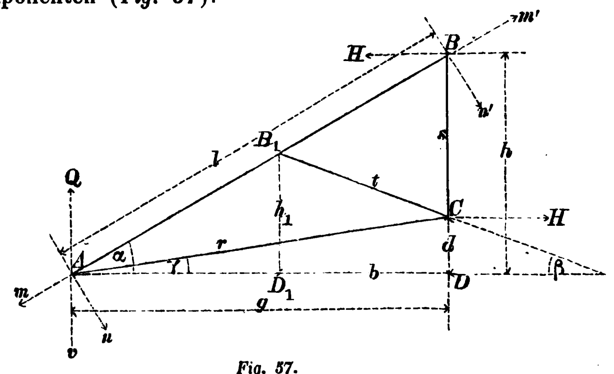


Fig. 57.

	nach Av.	nach AB.
R giebt	$R\dfrac{s}{r}$ und	$R\dfrac{l}{r}$
$A \cos \alpha$ „	A „	$A \sin \alpha = A\dfrac{h}{l}$.

Folglich ist

$$Q = R\frac{s}{r} + A; \quad R = (Q - A)\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{a)}$$

und die Pressung des Sparrens bei A

$$= R\frac{l}{r} + A\frac{h}{l} = (Q-A)\frac{l}{s} + A\frac{h}{l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{b)}.$$

Ferner liefert die Zerlegung des Verticaldrucks B_1 nach den Richtungen B_1A und B_1C nach letzterer Richtung (mit Rücksicht darauf, dass Resultante und Componenten mit den Seiten des Dreiecks BCB_1 parallel sind) die Pressung der Strebe:

$$T = B_1\frac{t}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{c)}.$$

Was nun endlich die Spannung S der Hängestange Bc betrifft, so denke man statt dieser Stange, deren zwei: BC und BC', welche von B ausgehend daselbst unter einem sehr spitzen Winkel auseinander laufen und durch eine sehr kurze horizontale Stange CC' verbunden sind. Ist H die Spannung der letzteren, so halten sich um den Punkt C die 4 Kräfte:

R nach CA gerichtet, H nach CC' gerichtet;

T „ B_1C „ ; $\frac{1}{2}S$ „ CB „

Gleichgewicht, indem nun jede der beiden getrennten Stangen BC und BC' natürlich die Spannung $\frac{1}{2}S$ hat. Aus dem Gleichgewicht dieser Kräfte ergiebt sich:

$$H = R\cos\gamma - T\cos\beta = R\frac{g}{r} - T\frac{b}{t}$$

(diese Kraft kann für die bei C anzuordnende Verbindung in Betracht kommen, worauf hier aber nicht weiter reflectirt wird) und

$$\frac{1}{2}S = R\sin\gamma + T\sin\beta = R\frac{d}{r} + T\frac{h_1-d}{t}.$$

Diese letztere Gleichung lässt sich zu einer für die weiteren Anwendungen bequemeren Form umgestalten. Denkt man nämlich nach der Zerlegung der Hängestange in zwei dergl. die andere Hälfte des Gespärres (damit auch die Theilstange BC') fortgenommen, so erfordert das Gleichgewicht die Anbringung einer der Spannung in CC' gleichen Horizontalkraft H bei B (ausser eventuell bei **fester** Verbindung des Sparrenkopfes eines Kräftepaares, welches mit dem Spannungsmomente in dem Verbindungsstück oder obersten Sparrenquerschnitt im Gleichgewicht ist), und es muss nun bei B Gleichgewicht stattfinden zwischen

der Horizontalkraft H,

der Kraft $\frac{1}{2}S$ nach BC,

dem Sparrendruck $B\cos\alpha$ nach Bn'

und der Pressung des Sparrens als einer nach Bm' gerichteten Kraft. Insbesondere entspricht dem Gleichgewicht nach der auf AB normalen Richtung Bn' die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2}S + B\right)\cos\alpha = H\sin\alpha,$$

woraus

$$\frac{1}{2} S = H \frac{h}{g} - B$$

oder mit Rücksicht auf obige Gleichung für H:

$$\frac{1}{2} S = R \frac{h}{r} - T \frac{\frac{b}{g} h}{t} - B = R \frac{h}{r} - T \frac{h - h_1}{t} - B$$

hervorgeht. Die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit dem vorhin aus dem Gleichgewicht um C abgeleiteten liefert:

$$R \frac{h - d}{r} - T \frac{h - d}{t} - B = 0$$

oder

$$\frac{R}{r} - \frac{T}{t} = \frac{B}{s},$$

und hieraus durch Substitution in dem einen oder anderen der beiden Ausdrücke von $\frac{1}{2} S$:

$$\frac{1}{2} S = T \frac{h_1}{t} + B \frac{d}{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{d)},$$

oder im vorliegenden Fall wegen Gleichung c):

$$\frac{1}{2} S = B_1 \frac{h_1}{s} + B \frac{d}{s}.$$

Hiermit sind die oben sub I. angegebenen Formeln 1) bis 3) gerechtfertigt; ist $AB_, = B_, B$, so hat man nur $h_, = \frac{1}{2} h$ zu setzen. Die mit a) bis d) bezeichneten Gleichungen haben aber auch eine allgemeinere Bedeutung für die sämmtlichen Constructionssysteme *Figg.* 51—53 der vorliegenden Gattung.

2. System *Fig.* 52.

Nach Gleichung a) und c) hat man sofort:

$$R_1 = (Q - A) \frac{r}{s} \quad \text{und} \quad T_1 = B_2 \frac{t_1}{s_1}.$$

Die Pressung $T_,$, welche sich auf den Punkt $C_,$ (*Fig.* 52) als eine nach $B_2 C_1$ gerichtete Kraft überträgt, zerfällt daselbst

in eine Componente nach $C_, D_,$, die Spannung $S_,$ in $B_, C_,$ erzeugend,
und „ „ „ $C_, C$, welche mit dem Ueberschuss der Spannung R_1 in $AC_,$ über die Spannung R in $C_, C$ im Gleichgewicht sein muss. Demnach ist (mit Rücksicht darauf, dass Resultante und Componenten mit den Seiten des Dreiecks $B_2 C_1 C_2$ parallel sind)

$$S_1 = T_1 \frac{s_2}{t_1} \quad \text{und} \quad R = R_1 - T_1 \frac{c_1}{t_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{e)},$$

welche Gleichungen wieder als allgemeine Formeln zu betrachten sind, nach welchen bei den zusammengesetzten Systemen derselben Gattung das Gleichgewicht der Kräfte an sämmtlichen dem Punkte $C_,$ analogen Punkten beurtheilt werden muss.

Die Kraft $S_{,}$ pflanzt sich durch die Hängestange zum Punkte $B_{,}$ fort und setzt sich daselbst mit dem Verticaldruck $B_{,}$ des Sparrens zu der Resultanten $S_{,} + B_{,}$ zusammen, welche, nach den Richtungen $B_{,}A$ und $B_{,}C$ zerlegt, in letzterer Componente die Pressung T der Strebe $B_{,}C$ liefert; dieselbe ist also nach Gleichung c):

$$T = (S_1 + B_1)\frac{t}{s}\cdot$$

Schliesslich ist nach Gleichung d):

$$\frac{1}{2}S = T\frac{h_1}{t} + B\frac{d}{s}\cdot$$

Durch successive Substitutionen ergeben sich dann leicht die oben in den Formeln 6) bis 9) angegebenen zweiten Ausdrücke, welche nur die verticalen Sparrendrucke und die Dimensionen des Gespärres enthalten; dabei ist nur in Betreff der Gleichung 7) zu berücksichtigen, dass sich verhält

$$c_1 : s_1 - s_2 = r : s$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{c_1}{s_1} = \frac{s_1 - s_2}{s_1}\frac{r}{s}\cdot$$

Um die auf gleiche Sparrenabtheilungen bezüglichen Formeln 5 a) bis 9 a) zu erhalten, braucht man in den Formeln 5) bis 9) nur

$$s_2 = \frac{1}{3}s;\quad s_1 = \frac{2}{3}s;\quad h_1 = \frac{2}{3}h$$

zu setzen.

3. System *Fig. 53.*

Die für dasselbe sub III. angegebenen Gleichungen 10) bis 18) ergeben sich durch unmittelbare Anwendung der allgemeinen Formeln a), c), d), e), welche überhaupt ausreichen, um bei jeder etwa noch weiter fortgesetzten Vervielfältigung der Streben und Hängestangen die in denselben, sowie in den einzelnen Abtheilungen der Spannstange stattfindenden Spannungen successive zu berechnen. Die erforderlichen successiven Substitutionen sind für das vorliegende System nur unter der Voraussetzung gleich langer Abtheilungen des Sparrens oben ausgeführt worden, und zwar findet man dann die betreffenden Formeln 11 a) bis 18 a) leicht, indem man noch

$$s_3 = \frac{1}{4}s;\quad s_2 = \frac{1}{2}s;\quad s_1 = \frac{3}{4}s;\quad h_1 = \frac{3}{4}h;\quad c_2 = c_1 = \frac{1}{4}r$$

setzt. —

4. System *Fig. 54.*

Hierbei hat man zunächst nach den allgemeinen Formeln a) und c) mit Rücksicht auf die bereits oben sub IV angeführten und die aus *Fig. 58* ersichtlichen Bezeichnungen:

$$R = (Q - A)\frac{r}{\sigma};\quad T = C\frac{t}{\sigma}\cdot$$

Indem man diese Kräfte R und T am Punkte D, auf welchen sie bezüglich in den Richtungen DA und

Fig. 58.

DC' einwirken, nach den Richtungen DH' und DB' zerlegt, erhält man die Spannungen

H = der Componentensumme nach DH'
und S = „ „ „ DB', also

$$H = R\frac{\gamma}{r} - T\frac{B'C'}{DC'}$$

$$S = R\frac{\delta}{r} + T\frac{\delta}{DC'}.$$

Was die in diesen Ausdrücken vorkommenden Coefficienten von T betrifft, so lassen sie sich durch die übrigen eingeführten Buchstabenbezeichnungen folgendermassen ausdrücken. Betrachtet man

das Dreieck ABB' durch CC' als Transversale,
„ „ ACC' „ BB' „ „ geschnitten,

so ist nach einem bekannten geometrischen Satz:

$$a' \cdot s \cdot B'C' = b' \cdot \delta \cdot (\gamma + B'C')$$
$$l \cdot t \cdot B'C' = b' \cdot DC' \cdot \gamma.$$

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich der Coefficient von T in dem Ausdruck von H:

$$\frac{B'C'}{DC'} = \frac{b'\gamma}{lt} = \frac{b\gamma}{gt};$$

und wenn man den hieraus folgenden Werth

$$B'C' = \frac{b'\gamma}{lt} \cdot DC'$$

dem aus der ersten der obigen beiden Gleichungen gezogenen:

$$B'C' = \frac{b'\gamma\delta}{a's - b'\delta}$$

gleich setzt, so ergiebt sich daraus der Coefficient von T in dem Ausdruck von S:

$$\frac{\delta}{DC'} = \frac{a's - b'\delta}{lt} = \frac{as - b\delta}{gt}.$$

Folglich ist:

$$H = R\frac{\gamma}{r} - T\frac{b\gamma}{gt}$$

$$S = R\frac{\delta}{r} + T\frac{as - b\delta}{gt} = T\frac{as}{gt} + H\frac{\delta}{\gamma}.$$

Nach der allgemeinen Gleichung b) ist ferner noch die Pressung im Sparren bei A

$$= (Q - A)\frac{AE}{\sigma} + A\frac{h+d}{l} = (Q - A)\frac{a' + \sigma\frac{h+d}{l}}{\sigma} + A\frac{h+d}{l}$$

$$= (Q - A)\frac{a'}{\sigma} + Q\frac{h+d}{l}.$$

Schliesslich hat man zur Fortschaffung der vorläufig eingeführten Hülfsgrössen σ, δ, γ folgende Verhältnisse:

$$\sigma : t = l : g; \quad \delta : s = d : h$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : DH' = h + d : h \\ DH' : t = l : h + d \end{array}\right\} \gamma : t = l : h.$$

Mit ihrer Hülfe wird dann

$$R = (Q - A)\frac{gr}{lt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{f)}$$

$$T = C\frac{g}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{g)}$$

$$H = R\frac{lt}{hr} - T\frac{b}{gt}\frac{lt}{h} = \left(R\frac{t}{r} - T\frac{b}{g}\right)\frac{l}{h} \quad \ldots \ldots \text{h)}$$

$$S = T\frac{as}{gt} + H\frac{ds}{h}\frac{h}{lt} = \left(T\frac{a}{g} + H\frac{d}{l}\right)\frac{s}{t} \quad \ldots \ldots \text{i)}$$

und die Pressung im Sparren bei A

$$= (Q - A)\frac{a'g}{lt} + Q\frac{h+d}{l} = (Q - A)\frac{a}{t} + Q\frac{h+d}{l} \quad \ldots \text{k).}$$

Die oben sub IV, Gleichung 21) und 22) für H und S angegebenen zweiten Ausdrücke findet man durch Substitution der Werthe von R und T aus Gleichung 19) und 20), resp. von T und H aus Gleichung 20) und 21); die Gleichungen 21 a) und 22 a) werden erhalten, indem man in Gleichung 21) und 22) $a = \frac{1}{2}g$ und $s = r$ setzt.

5. System *Fig. 55.*

Nach den Formeln f) und g) ist

$$R_1 = (Q - A)\frac{gr}{lt}; \quad T_1 = C_1\frac{g}{l}; \quad T_2 = C_2\frac{g}{l}.$$

T_1 zerfällt bei U nach den Richtungen CU und UD in die gleichen Componenten

$$U = T_1\frac{\frac{1}{2}r}{t} = \frac{1}{2}C_1\frac{gr}{lt};$$

ebenso T_2 bei V in die gleichen Componenten

$$V = \frac{1}{2}C_2\frac{gs}{lt}$$

nach den Richtungen CV und VD. Also ist

$$R = R_1 - \frac{1}{2}C_1\frac{gr}{lt} = \left(Q - A - \frac{1}{2}C_1\right)\frac{gr}{lt}$$

$$T = C\frac{g}{l} + U\frac{t}{r} + V\frac{t}{s} = \frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{g}{l};$$

demnächst nach den allgemeinen Formeln h) und i):

$$H = \left[Q - A - \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{b}{g}\right]\frac{g}{h}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{a}{g} + \frac{1}{2} C_2 + B\right]\frac{g}{h}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{a}{l} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2}(C_1 + 2C + C_2)\frac{a}{g} + \frac{1}{2} C_2 + B\right]\frac{gd}{lh}\right\}\frac{s}{t}.$$

Endlich ist

$$S_1 = S + \frac{1}{2} C_2 \frac{gs}{lt}.$$

Es sind dies die obigen Gleichungen 23) bis 32). Die einfacheren Formen, welche die Ausdrücke 30) und 32) von S und H für den Fall annehmen, dass die Hauptstütze CD gerade unter der Mitte des Sparrens steht, erhält man leicht durch Substitution von

$$a = \frac{1}{2} g; \quad r = s.$$

Die Spannungen U und V der eingeschalteten Zugstangen CU und CV sind übrigens selbst in diesem Falle nur dann einander gleich, also die Pressung im Sparren bei C keiner sprungweisen Aenderung unterworfen, wenn noch $C_1 = C_2$ ist, was dann der Fall sein wird, wenn das obere Ende B ebenso wie das untere Ende A des Sparrens nur lose (mittelst eines Bolzens) verbunden ist. —

Die Gleichung 33) bedarf nach den Untersuchungen im I. Kapitel keiner weiteren Begründung. Was die Gleichungen 34) und 35) betrifft, so wird offenbar die Sparrenpressung P über dem untersten Zwischenstützpunkt erhalten, indem man von der Pressung des Sparrens bei A die nach der Richtung des Sparrens genommene Belastung W seiner untersten Abtheilung, also die Grösse

$W\frac{h}{l}$ bei dem System *Fig. 51—53*,

$W\frac{h+d}{l}$ „ „ „ *Fig. 54* u. *55*

abzieht; hiernach ergeben sich die Gleichungen 34) und 35) sofort aus den Formeln b) sub 1 und k) sub 4. —

Beispiel:

Es sei ein eisernes Dach nach dem System *Fig. 52* zu entwerfen, und zwar sei:

$g = 23{,}4$ Fuss; $d = 2$ Fuss: $t = 9{,}7$ Fuss
$h = 11{,}3$ „ ; $r = 23{,}5$ „ ; $t = 8{,}2$ „
$l = 26$ „ ; $s = 9{,}3$ „ .

Die Entfernung der Gespärre von einander sei $= 5{,}08$ Fuss. Die 3 Abtheilungen des Sparrens seien gleich lang, dann ist die Horizontalprojection einer jeden

$$a = \frac{23{,}4}{3} = 7{,}8 \text{ Fuss}.$$

Ist π Pfd. die Belastung pro 1 Quadratfuss der Horizontalprojection des Dachs, so ist

$$p = 5{,}08 \cdot \pi \text{ Pfd}; \quad \text{also } pa = 7{,}8 \cdot 5{,}08 \cdot \pi = 39{,}624 \cdot \pi \text{ Pfd.}$$

Sei ferner der Sparren oben bei B mit zwei Bolzen an dem betreffenden Verbindungsstück befestigt, so ist

$$\begin{array}{rclcl} A & = & 0{,}3942 \cdot 39{,}624 \cdot \pi & = & 15{,}62\ \pi \text{ Pfd.} \\ B_2 & = & 1{,}1346 \cdot \quad ,, \quad ,, & = & 44{,}96\ \pi \quad ,, \\ B_1 & = & 0{,}9615 \cdot \quad ,, \quad ,, & = & 38{,}10\ \pi \quad ,, \\ B & = & 0{,}5096 \cdot \quad ,, \quad ,, & = & 20{,}19\ \pi \quad ,, \\ \hline Q & = & 3 \cdot \quad ,, \quad ,, & = & 118{,}87\ \pi \text{ Pfd.} \end{array}$$

Hiernach findet man aus den Formeln 4) und 5 a) bis 9 a):

$$R_1 = (118{,}87 - 15{,}62) \frac{23{,}5}{9{,}3} \pi = 260{,}91\ \pi \text{ Pfd.}$$

$$T_1 = \frac{3}{2} \cdot 44{,}96 \frac{8{,}2}{9{,}3} \pi = 59{,}46\ \pi \text{ Pfd.}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 44{,}96\ \pi = 22{,}48\ \pi \text{ Pfd.}$$

$$R = \left(118{,}87 - 15{,}62 - \frac{1}{2} \cdot 44{,}96\right) \frac{23{,}5}{9{,}3} \pi = 204{,}11\ \pi \text{ Pfd.}$$

$$T = \frac{1}{2} (44{,}96 + 2 \cdot 38{,}1) \frac{9{,}7}{9{,}3} \pi = 63{,}19\ \pi \text{ Pfd.}$$

$$S = \left[\frac{2}{3} (44{,}96 + 2 \cdot 38{,}1) \frac{11{,}3}{9{,}3} + 2 \cdot 20{,}19 \cdot \frac{2}{9{,}3}\right] \pi = 106{,}82\ \pi \text{ Pfd.}$$

Auch ist

$$M = 0{,}1058 (5{,}08 \cdot \pi) (7{,}8)^2 = 32{,}69\ \pi \text{ Fusspfd.}$$

und nach Gleichung 34):

$$G = \left[(118{,}87 - 15{,}62) \frac{26}{9{,}3} - (39{,}62 - 15{,}62) \frac{11{,}3}{26}\right] \pi = 278{,}3\ \pi \text{ Pfd.}$$

Das Dach solle mit Schiefer gedeckt werden; demgemäss werde angenommen pro 1 Quadratfuss der Horizontalprojection des Dachs:

$$\begin{array}{lcl} \text{Eigengewicht der Bedeckung} = 10 \dfrac{26}{23{,}4} & = & 11{,}1 \text{ Pfd.} \\ \quad ,, \quad \text{der Substruction} = & & 3{,}9 \quad ,, \\ \text{Maximalbelastung durch Schnee} & = & 15 \quad ,, \\ \hline \text{so ist } \pi & = & 30 \text{ Pfd.,} \end{array}$$

folglich:

$$\begin{array}{rcll} R_1 & = & 7827 & \text{Pfd.} \\ T_1 & = & 1784 & ,, \\ S_1 & = & 674 & ,, \\ P & = & 8349 & ,, \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} R & = & 6123 & \text{Pfd.} \\ T & = & 1896 & ,, \\ S & = & 3205 & ,, \\ M & = & 980{,}7 & \text{Fusspfd.} \end{array}$$

Hiernach sind die den einzelnen Theilen zu gebenden Dimensionen leicht zu beurtheilen. Bei den Hänge- und Spannstangen ist auf die Verschwächung ihrer Querschnitte durch die zur Verbindung dienenden Keile und Bolzen Rücksicht zu nehmen, welche selbst auf Schubfestigkeit zu berechnen sind. Bei der Berechnung der Streben kommen die Gesetze der zusammengesetzt-rückwirkenden Festigkeit zur Anwendung.

§. 32. Brückenträger im Allgemeinen.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Gesetze der Elasticität und Festigkeit auf die Construction der Brücken; bei ihren oft riesigen Dimensionen und bedeutenden Kosten ist möglichste Materialersparniss, also möglichst genaue Berechnung mehr als irgendwo sonst geboten.

Mit Rücksicht auf den allgemeinen Charakter der Construction und die Art und Weise, wie ihre einzelnen Theile von den Kräften angegriffen werden und die Stabilität des Ganzen vermitteln, lassen sich zunächst die Brücken eintheilen in: Balkenbrücken, Hängebrücken und Gewölbebrücken.

Die Balkenbrücken sind in ihren Haupttheilen entweder einfache Balken oder zusammengesetzte feste Constructionen von im Wesentlichen gleicher Wirkungsweise wie einfache Balken, indem die Constructionselemente zum Theil auf Zug, zum Theil auf Druck in Anspruch genommen werden, ebenso wie die stetige Masse eines einfachen Balkens stellenweise ausgedehnt, stellenweise comprimirt wird. Die Mittellinie eines einfachen oder zusammengesetzten Balkenträgers (der geometrische Ort der Schwerpunkte seiner Querschnitte) kann gerade oder nach Oben oder nach Unten gebogen sein, indem die Stabilität auf der Festigkeit des Ganzen beruht, welche nur eine geringfügige, durch die Elasticität bedingte Formänderung zulässt.

Die charakteristischen Haupttheile einer Hängebrücke sind aufgehängte Seile oder Ketten, die ihrer Natur nach nur durch ihre absolute Festigkeit Widerstand leisten können. Die Mittellinie der Kette bildet nothwendig einen nach Unten convexen Bogen, indem bei der fast unbeschränkten Biegsamkeit die Stabilität wesentlich darauf beruht, dass der Schwerpunkt eine tiefste Lage hat.

Eine Gewölbebrücke ist im Wesentlichen ein aus festen Körpern zusammengesetzter, nach Oben convexer Bogen, welcher der untergeordneten und unsicheren Wirksamkeit des Bindemittels wegen nur durch rückwirkende Festigkeit Widerstand leisten soll, und dessen Stabilität darauf beruht, dass die einzelnen Körper eine dem vorbemerkten Charakter der Construction entsprechende Gestalt und relative Lage erhalten.

Das Material zu den Haupttheilen der Balkenbrücken ist im Allgemeinen Holz, Schmiede- und Gusseisen; der Hängebrücken: Schmiedeeisen; zu den Gewölbebrücken: Stein.

Die zur Unterstützung dienenden Pfeiler erfahren in horizontaler Richtung bei den Hängebrücken einen Zug, bei den Gewölbebrücken einen Druck, bei den Balkenbrücken im weiteren Sinne kann ein Zug, ein Druck oder auch keine Horizontalkraft auf die Pfeiler ausgeübt werden. Dieser Umstand wird auch wohl als Hauptmerkmal bei der Eintheilung zu Grunde gelegt, indem man die

Balkenbrücken mit Seitenschub in eine Abtheilung mit den Gewölbebrücken bringt, während man Balkenbrücken mit Seitenzug mit den Hängebrücken in eine Abtheilung bringen müsste; indessen würde eine einfache Verbindung der durch den Seitendruck oder Zug unmittelbar angegriffenen Pfeilerpunkte genügen, um diese Kräfte von den Pfeilern abzufangen, ohne dass dadurch in der Wirkungsweise der übrigen Construction eine Aenderung herbeigeführt zu werden brauchte.

Die Berechnung der Ketten- und Gewölbebrücken ist dem III. und IV. Abschnitte dieses Kapitels vorbehalten.

Die Construction der Balkenbrücken, in früherer Zeit lediglich aus hölzernen Balken gebildet, ist eine äusserst mannigfaltige geworden, seitdem ausser dem Holze gegen Anfang des letzten Viertels des vorigen Jahrhunderts auch das Gusseisen und gegen Ende des ersten Viertels des gegenwärtigen Jahrhunderts auch das gewalzte Eisen dazu verwendet wurde, und es sind namentlich die Eisenbahnbauten der letzten Jahrzehnte, denen diese Brücken ihre zeitige Ausbildung verdanken.

Was die allgemeine Anordnung der Balkenbrücken betrifft, so wird bei geringen Spannweiten eine der Breite der Brücke entsprechende Anzahl Balken in mässiger Entfernung von einander auf die Pfeiler gelegt, welche unmittelbar die Brückenbahn tragen. Bei grösseren Spannweiten werden grössere Hauptträger in geringerer Anzahl (häufig nur zwei für eine Strasse, dieselbe zwischen sich fassend) auf die Pfeiler gelegt; daran sind Querträger befestigt, welche entweder unmittelbar oder mittelst darauf gelegter Längenbalken die Brückenbahn tragen, so dass in letzterem Fall die Querträger gleichsam an die Stelle der Pfeiler bei kleinen Brücken treten. Um die Hauptträger bei ihrer grossen Höhe gegen den Seitendruck des Windes und überhaupt in ihrer Lage zu sichern, werden sie unter sich ausser durch die Querträger noch durch Kreuzverband (Windstreben) verbunden und häufig auf den Pfeilern mit Seitenhaltung versehen.

Je nach der Beschaffenheit der Hauptträger (der Träger überhaupt bei kleinen Spannweiten) lassen die Balkenbrücken sich weiter eintheilen in: Balkenbrücken im engeren Sinn und Bogenbrücken; bei ersteren sind die Hauptträger im Wesentlichen gerade, bei letzteren bogenförmige Balken. Die Berechnung der Bogenbrücken ist dem nächsten Abschnitte dieses Kapitels vorbehalten.

Abgesehen von denjenigen Fällen, wo die Träger bei kleinen Brücken aus einfachen Balken bestehen, welche, unmittelbar auf den Pfeilern liegend, ohne Weiteres nach den Principien des I. Kapitels zu berechnen sind, handelt es sich bei den Balkenbrücken im engeren Sinn um die Aufgabe, bei gegebener Oeffnungsweite zwischen den Pfeilern und gegebener Belastung einen Hauptträger mit möglichst geringem Materialaufwande herzustellen. Dazu bieten sich zwei Mittel dar: die Vergrösserung des Widerstandsmoments durch Anhäufung des Materials in grosser Entfernung von der neutralen Axe, oder die Verkleinerung der Spannungsmomente in den Querschnitten durch Verkürzung der freitragenden Längen, also durch Gewinnung von Mittelstützpunkten zwischen

den Pfeilern. Die hieraus sich ergebenden Constructionssysteme von Balkenträgern können als System der erhöhten Balken und System der verkürzten Balken unterschieden werden.

Ein nach ersterem System construirter Hauptträger besteht im Allgemeinen aus einem unteren und oberen der Länge nach stetig fortlaufenden Balken (Streckbalken, Rahm, Gurtung), welche auf verschiedene Weise in unveränderlichem Abstand erhalten und an der gegenseitigen Verschiebung gehindert werden. Die dazu dienende Verbindung wird namentlich entweder durch eine volle, zumeist aus Blechtafeln zusammengenietete Wand, oder durch ein aus verticalen und geneigten Stäben gebildetes Fachwerk hergestellt, wonach man die fraglichen Träger in platten- oder wandförmige Träger (insbesondere Blechwand-Träger) und Fachwerk-Träger unterscheiden kann. Dabei macht es keinen principiellen Unterschied, wenn man die Mittelwand durch einen verticalen Längenschnitt in zwei Wände theilt und diese bis zu den Seitenrändern des Unter- und Oberrahms auseinander rückt, wodurch aus dem wandförmigen ein kasten- oder röhrenförmiger Träger hervorgeht. Die Fachwerkträger, bei den grossen Eisenbahnbrücken der neueren Zeit vorzugsweise als Hauptträger angewendet, zerfallen wieder in mehrere, selbst principiell verschiedene Systeme, wovon im Folgenden ausführlicher die Rede sein wird.

Bei dem System der verkürzten Balken werden die erforderlichen Zwischenstützpunkte in den Knotenpunkten eines Gespärres gewonnen, dessen Sparren oder Streben von diesen Knotenpunkten schräg abwärts nach den Pfeilern hinlaufen. Dieses Gespärre zusammen mit den dadurch gestützten Balken heisst ein Hängwerk, wenn das Gespärre über dem Balken liegt, dieser sonach an jenem hängt; dagegen ein Sprengwerk, wenn das zwischen die Pfeiler eingesprengte Gespärre den Balken von Unten her stützt. Bei dem Hängwerk pflegen die Streben gegen die Enden des Balkens geführt zu sein, so dass dadurch dieser mit dem Gespärre zu einem Ganzen verbunden ist, welches, ähnlich den erhöhten Balken, keinen Seitenschub auf die Pfeiler ausübt; bei dem Sprengwerk dagegen ist das Gespärre unabhängig von dem gestützten Balken, welcher nicht den Seitenschub der Streben aufnehmen und von den Pfeilern abhalten kann. — Die Häng- und Sprengwerke haben beide ihre besonderen Vorzüge und Nachtheile, welche man, namentlich bei sehr grossen Spannweiten, in den vereinigten Häng- und Sprengwerken zu vermitteln gesucht hat.

Endlich sind noch einige Verstärkungsconstructionen hölzerner Balken zu erwähnen, welche bei mittelgrossen zu überbrückenden Weiten Anwendung finden und welche vom einfachen Balken zu den vorbemerkten ausgebildeten Systemen des erhöhten und des verkürzten Balkens den Uebergang bilden: der verzahnte oder verdübbelte, sowie der Laves'sche Balken zu ersterem, der sogenannte armirte Balken zu letzterem System. —

Um einen hinsichtlich seiner allgemeinen Construction entworfenen Hauptträger hinsichtlich der erforderlichen Stärken seiner einzelnen Theile zu berechnen, ist vor Allem die Kenntniss, resp. die den Verhältnissen entsprechende Annahme seiner grössten zu erwartenden Belastung nöthig. Diese Belastung

besteht aus: 1. dem eigenen Gewicht des Trägers und des auf denselben entfallenden Antheils der Querträger, Windstreben und der Brückenbahn; 2. dem betreffenden Theil der zufälligen Belastung der Brücke durch Eisenbahnwagen, Frachtfuhrwerk, Menschengedränge; 3. dem Druck des Windes. Was letzteren betrifft, so könnte die Wirkung seiner horizontalen Componente, welche bei einem hohen wandförmigen oder dichten Fachwerkträger (Gitterträger) ziemlich bedeutend werden kann, wenn diese Componente gerade rechtwinkelig gegen den Träger gerichtet ist, gerade so beurtheilt werden, wie die Wirkung der einen Träger belastenden Schwerkräfte: die ganze Brücke verhält sich dabei wie ein umgelegter erhöhter Balken, bei welchem die äusseren Hauptträger die Stelle der Streckbalken, die Brückenbahn, Querträger und Windstreben aber die Stelle der Mittelwand oder des Fachwerks vertreten. Zu grösserer Sicherheit ist es angemessen, die Windstreben so stark zu machen, dass sie die angedeutete Function allein versehen könnten; gewöhnlich begnügt man sich übrigens ihre Stärken nach praktischem Gefühl und Erfahrung anzunehmen. Der Verticaldruck des Windes kann dadurch genügend berücksichtigt werden, dass man die übrigen Belastungen etwas reichlich veranschlagt.

Hiernach bleiben nur das Eigengewicht und die zufällige Belastung durch einen Eisenbahnzug, eine Reihe von Frachtwagen etc., welche beide Belastungen sich auch als bleibende und vorübergehende, mobile Belastung unterscheiden, als Grundlage der Rechnung übrig. Beide Lasten werden als gleichförmig vertheilt in Rechnung gestellt, erstere über die ganze Länge, letztere event. auch nur über ein gewisses Längenstück des Trägers sich erstreckend; pro Längeneinheit des Trägers sei erstere mit p', letztere mit p'' bezeichnet, die Summe beider $= p' + p''$ mit p.

Das Eigengewicht p' pro Längeneinheit des Hauptträgers ist streng genommen erst das Resultat der Rechnung und des detaillirten Entwurfs; vorläufig muss es mit einem angenäherten Werth in Rechnung gestellt werden, welcher am sichersten aus einer empirischen Formel entnommen wird, in welcher die Abhängigkeit der Grösse p' von den wesentlichen, darauf influirenden Elementen sich rationell ausgedrückt findet und deren Coefficienten durch Vergleichung mit den bekannten Elementen und dem bekannten p' einer möglichst grossen Anzahl ausgeführter Brücken bestimmt worden sind. Für gerade, nach dem System der erhöhten Balken construirte Hauptträger (wand- oder kastenförmige und Fachwerkträger) lässt sich eine solche empirische Formel ihrer allgemeinen Form nach durch folgende Betrachtung erhalten:

Sofern p' vom Gewicht des Hauptträgers selbst abhängt, ist es dessen Querschnitt q proportional, und sofern es vom Gewicht der Querträger, Windstreben und der Brückenbahn abhängt, kann es dem als Belastung des fraglichen Hauptträgers zu rechnenden Theil b der Brückenbahnbreite proportional gesetzt werden, also überhaupt $p' = x b + y_{,} q$, unter x und $y_{,}$ Constante verstanden. Ist aber ferner l die Spannweite, h die Höhe eines Hauptträgers, so ist das Biegungsmoment (auf Biegung wirkende Kraftmoment) bei voller Belastung für irgend einen Querschnitt proportional $p l^2$, dagegen das Widerstandsmoment (s. §. 7) wegen vorzugsweiser Anhäufung des Materials in den beiden Streck-

balken nahe proportional qh oder auch ql, weil $h:l$ ein bei allen diesen Trägern nur wenig verschiedenes Verhältniss (im Mittel 1 : 10) ist; aus der Gleichheit oder Proportionalität des Biegungs- und des Widerstandsmoments ergiebt sich sonach q proportional $pl = (p' + p'')l$, etwa $q = z_{,}l(p' + p'')$. Hiernach ist

$$p' = xb + y_{,}z_{,}l(p' + p'') = xb + yl(p' + p'')$$

$$p' = \frac{xb + ylp''}{1 - yl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

Die Bestimmung der Constanten x, y dieser oder einer ähnlichen empirischen Formel, für verschiedene Constructionssysteme besonders ausgeführt, würde für die Berechnung von wesentlichem Nutzen sein, indem sich erwarten liesse, dass das ihnen gemäss in die Rechnung eingeführte p' dem nachher als Resultat der Rechnung und darauf basirten Construction gefundenen p' stets nahe genug kommen würde, um eine Correctionsrechnung unnöthig zu machen. Einstweilen pflegt man sich mit einer einfacheren und roheren Schätzung zu begnügen; Laissle und Schübler* z. B. haben bei Vergleichung vieler ausgeführten schmiedeeisernen Eisenbahnbrücken deren Gewicht pro laufendes Meter und pro Geleise im Durchschnitt $= 70\,l$ Kilogr. gefunden, unter l die Spannweite in Metern verstanden, setzen aber für die leichteren Constructionen der neueren Zeit nur $40\,l$ Kilogr. und halten denselben Werth bei vorläufigen Berechnungen hölzerner Brücken für passend. (In der That sind für Holz, verglichen mit Schmiedeeisen, die zulässige Spannung und das specifische Gewicht ungefähr in gleichem Verhältniss kleiner.)

Was die zufällige Belastung p'' betrifft, so hat man bei Eisenbahnbrücken als den gefährlichsten Fall für jedes Geleise eine ununterbrochene Reihe von Locomotiven und Tendern, für Fahrbahnen eine ununterbrochene Reihe schwerer Lastwagen, für Fusswege ein dichtes Menschengedränge vorauszusetzen. Das Gewicht einer Locomotive mit Wasserfüllung beträgt etwa

	360—660 Ctr. = 18000—33000 Kilogr.
das Gewicht des gefüllten Tenders	12000—15000 „
welches Totalgewicht von	30000—48000 Kilogr.

bei Wiederholung von 12 zu 12 Metern die zufällige Belastung = 2500—4000 Kilogr. pro Geleise und laufendes Meter ergiebt. In England pflegt 1 Tonne pro laufenden Fuss = 3333 Kilogr. pro laufendes Meter gerechnet zu werden.

Wird ferner das Gewicht eines schweren Lastwagens sammt Bespannung zu 200 Ctr. = 10000 Kilogr. und eine Wiederholung von 11 zu 11 Metern angenommen, so ergiebt sich ungefähr 900 Kilogr. pro laufendes Meter Fahrbahn.

Für Menschengedränge endlich kann 300 Kilogr. pro Quadratmeter Fussweg gerechnet werden. Auch rechnet man wohl bei Brücken für überzuführende Strassen 200 Kilogr. als durchschnittliche Maximalbelastung für jedes Quadratmeter der ganzen Brückenbahn, was mit den vorigen Angaben z. B. bei einer Fahrbahn von 6^m und zwei Fusswegen von $1{,}5^m$ Breite übereinstimmen würde. —

* Der Bau der Brückenträger mit wissenschaftlicher Begründung der gegebenen Regeln und mit besonderer Rücksicht auf die neuesten Ausführungen. Stuttgart, 1857.

Bei einem nach dem System der erhöhten Balken construirten Träger ist es nöthig, ausser dem Spannungsmoment eines Querschnitts auch die in demselben stattfindende Schubkraft zu kennen und hinsichtlich ihrer Wirkung in Betracht zu ziehen. Ist X ein beliebiger Querschnitt eines Trägers AB, so ist die Schubkraft in demselben, welche auch mit X bezeichnet werden soll, gleich der algebraischen Summe der die Trägerstrecke AX belastenden Schwerkräfte und der entgegengesetzt gerichteten Reactionen der unter dieser Strecke vorhandenen Stützpunkte, das Spannungsmoment dagegen, welches mit $[X]$ bezeichnet werden möge, gleich der algebraischen Summe der Momente aller dieser Kräfte, auf die Biegungsaxe des Querschnitts X bezogen. Dabei sollen die Reactionen der Stützpnnkte und ihre Momente positiv, die Belastungen und ihre Momente negativ gesetzt werden, so dass ein positiver Werth der Schubkraft X einem solchen Verschiebungszustand des Querschnitts X entspricht, wobei derselbe gegen einen unendlich nahe benachbarten Querschnitt der Strecke XB aufwärts verschoben ist, die Trägerstrecke AX folglich die andere XB aufwärts zieht oder von dieser abwärts gezogen wird, während ein positiver Werth von $[X]$ einem solchen Biegungszustand des Trägers bei X entspricht, wobei die elastische Linie nach Oben concav ist. Ist dann x der in der Richtung AB positiv genommene horizontale Abstand des Querschnitts X von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt, so besteht die Relation:

$$X = \frac{d[X]}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

vorausgesetzt, dass im Querschnitte X nicht eine vom Angriff einer vereinzelten Kraft herrührende Stetigkeitsunterbrechung der Belastung stattfindet, wie solches bei Brückenträgern den obigen Voraussetzungen gemäss nur bei den Stützpunkten stattfindet.

Von der Richtigkeit dieser Beziehung zwischen X und $[X]$ überzeugt man sich dadurch, dass man das unendlich kleine Trägerstück, welches zwischen den den Abständen x und $x + dx$ entsprechenden Querschnitten enthalten ist, herausgeschnitten denkt: *Fig. 59.* Indem es unter der Einwirkung der entgegengesetzten Kräfte X und $X + dX$, der entgegengesetzt drehenden Kräftepaare $[X]$ und $[X] + d[X]$ sowie seiner Belastung $- dX$ im Gleichgewicht sein muss, erhält man als Bedingung dafür die auf die Biegungsaxe des dem Abstand $x + dx$ entsprechenden Querschnitts bezogene Momentengleichung:

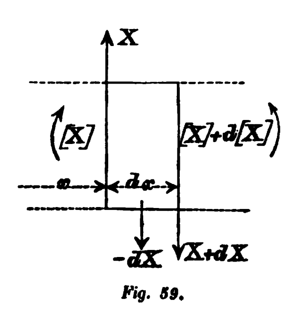


Fig. 59.

$$[X] + X \cdot dx = [X] + d[X] \quad \text{oder} \quad X = \frac{d[X]}{dx}$$

mit Rücksicht darauf, dass das der Belastung $= - dX$ entsprechende Moment als unendlich Kleines 2. Ordnung verschwindet.

Die Schubkraft X ist also ein Maass der Schnelligkeit, womit das Spannungsmoment $[X]$ von einem zum anderen Querschnitt sich verändert. Diese

Veränderung wird bei einem nach dem System der erhöhten Balken gebildeten Träger durch die wand- oder stabförmige Verbindung der beiden Streckbalken vermittelt, so dass die Anstrengungen dieser Verbindungstheile fast allein durch die Schubkräfte bedingt werden, während die Streckbalken zumeist durch die Spannungsmomente in Anspruch genommen werden.

Die Berechnung eines Brückenträgers zerfällt in die Bestimmung der jedem Querschnitte entsprechenden Werthe von X und $[X]$ und in die Berechnung der diesen Werthen entsprechenden Anstrengungen, welche die einzelnen Constructionselemente an der betreffenden Stelle des Trägers erfahren. Letztere Untersuchung muss für die einzelnen Constructionssysteme besonders vorgenommen werden; hier handelt es sich vorläufig nur um die Berechnung der den einzelnen Querschnitten entsprechenden Werthe von X und $[X]$, welche eine allgemeine, wenn auch nach Umständen nur mehr oder weniger angenäherte Gültigkeit hat, insofern dabei eine stetige Veränderlichkeit der Grössen X und $[X]$ vorausgesetzt wird, die streng genommen nur bei wandförmigen Trägern, bei Fachwerkträgern aber um so weniger stattfinden kann, je weniger dicht das Fachwerk ist.

Von besonderem Interesse ist ferner die Bestimmung derjenigen Querschnitte, für welche die Schubkraft und das Spannungsmoment = Null, oder absolut genommen = einem Maximum werden. Die Querschnitte $X = 0$, welche, falls sie nicht über einem Stützpunkt liegen, nach Gl. 2) mit den Querschnitten $[X] = max.$ zusammenfallen und dann mittlere Querschnitte heissen sollen, sind dadurch wichtig, dass in ihnen die Streckbalken am stärksten gemacht oder am weitesten aus einander gehalten werden müssen, resp. bei überall gleicher Stärke und Entfernung der Gefahr des Bruchs am meisten ausgesetzt sind, sowie auch dadurch, dass, indem die Richtung der relativen Verschiebung der Querschnitte bei ihnen sich umkehrt, auf den entgegengesetzten Seiten von ihnen auch die zur Verbindung der Streckbalken dienende volle oder Fachwerkswand in entgegengesetztem Sinne in Anspruch genommen wird und deshalb unter Umständen auch eine entgegengesetzte constructive Behandlung erfordert. Die Querschnitte $[X] = 0$, welche den Inflexionspunkten (Krümmungsradius $= \infty$) der elastischen Linie entsprechen und hier Uebergangsquerschnitte heissen mögen, können nur bei continuirlichen (mehrfach unterstützten) Trägern vorkommen, und es ist die Kenntniss ihrer Lage namentlich dann von Wichtigkeit, wenn die Streckbalken, je nachdem sie auf Zug oder auf Druck in Anspruch genommen werden, verschieden stark gemacht oder gar verschieden construirt werden sollen. Die Querschnitte $X = max.$ endlich erfordern die grösste Stärke der Mittelwand, oder es sind bei gleicher Stärke ihre Constructionselemente in jenen Querschnitten am meisten in Anspruch genommen. Es liegen diese immer zunächst den Stützpunkten, weil offenbar in irgend einem Querschnitt der Absolutwerth von $X =$ der Belastung sammt Eigengewicht der zwischen ihm und dem benachbarten mittleren Querschnitte enthaltenen Trägerstrecke sein, die Schubkraft folglich von jedem mittleren Querschnitt aus nach beiden benachbarten Stützpunkten hin stetig zunehmen muss.

Wesentlich ist es darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Grössen X und $[X]$ bei dem Hauptträger einer Brücke nicht nur mit der Lage des Querschnitts, sondern auch in demselben Querschnitt mit dem Belastungszustand der Brücke sich ändern, welcher letztere in der That in stetiger Veränderung begriffen ist, während eine mobile Last sich über die Brücke fortbewegt. Maassgebend für die erforderlichen Dimensionen der Constructionselemente eines gewissen Querschnitts sind die Maximalwerthe von X und $[X]$ für denselben, welche im Allgemeinen bei verschiedenen Belastungszuständen eintreten: hinsichtlich der allein von der Schubkraft in Anspruch genommenen Theile ist nur die Kenntniss des Maximums von X, hinsichtlich der allein vom Spannungsmoment in Anspruch genommenen Theile nur die Kenntniss des Maximums von $[X]$ erforderlich. Sofern aber ein Constructionstheil zugleich durch die Schubkraft und das Spannungsmoment des betreffenden Querschnitts in Anspruch genommen wird, müssen wenigstens die beiden Belastungszustände, deren einer dem grössten X und deren anderer dem grössten $[X]$ entspricht, in Betracht gezogen und hinsichtlich ihrer resultirenden Wirkung verglichen werden. Wenn sich auch nicht allgemein behaupten lässt, dass die grössere dieser beiden resultirenden Wirkungen nothwendig die absolut grösste bei irgend einem Belastungszustande sein müsse, so wird es doch in der Regel zulässig sein, dieselbe ohne nähere Untersuchung, welche leicht sehr umständlich ausfallen könnte, als maassgebend für den fraglichen Constructionstheil anzuwenden.

Mit den Werthen von X und $[X]$ in jedem einzelnen Querschnitt müssen sich natürlich bei der Hinüberbewegung der zufälligen Last über die Brücke auch die Lagen derjenigen Querschnitte verändern, in denen X und $[X]$ = Null sind, d. h. der mittleren und Uebergangsquerschnitte, und wird es ferner nöthig, die äussersten Grenzen zu ermitteln, zwischen welchen diese Querschnitte sich hin- und herbewegen können, indem die zwischenliegenden Trägerstrecken eine besondere, dem Umstand entsprechende constructive Behandlung erfordern, dass gewisse Theile in ihnen bald auf Zug, bald auf Druck in Anspruch genommen werden.

Schliesslich ist die Berechnung eines Brückenträgers verschieden, je nachdem allen Querschnitten gleiche Abmessungen gegeben werden oder nicht, und je nachdem der Träger nur an beiden Enden oder ausserdem auf Zwischenstützen aufliegt.

Bei einem Träger von constantem Querschnitt, welche Annahme nicht ausschliesst, dass dieser constante Querschnitt bei den Uebergangs- und mittleren Querschnitten eine Umkehrung bezüglich auf die Streckbalken, resp. deren Verbindungstheile erfahren kann, ist es ausser der Bestimmung der Strecken, in welchen jene ausgezeichneten Querschnitte sich bewegen, die fragliche Umkehrung also vorzunehmen ist, nur nöthig, die grössten Werthe von X und $[X]$ event. nebst zugehörigen Werthen von $[X]$ und X zu berechnen, welche in irgend einem Querschnitt bei irgend einem Belastungszustande der Brücke vorkommen können. Bei einem Träger von veränderlichem Querschnitt dagegen müssen die grössten Werthe von X und $[X]$ für jeden einzelnen Querschnitt, oder es muss, was dasselbe ist, das Gesetz berücksichtigt werden,

nach welchem die grössten Werthe von X und $[X]$ von einem zum anderen Querschnitt sich ändern, indem es in solchem Falle die Aufgabe ist, die Abmessungen der Querschnitte möglichst nach entsprechendem Gesetz so zu verändern, dass gleichartige Theile überall die gleiche Anstrengung erleiden. Die letztere Anordnung ist zum Zweck möglichster Materialersparniss zwar offenbar die vollkommenste; abgesehen davon indessen, dass die Möglichkeit der praktischen Ausführung unter allen Umständen die Ersetzung der theoretisch stetigen durch eine nach mehr oder weniger weiten Strecken sprungweise Abstufung der Abmessungen nöthig macht, kann es oft der Fall sein, namentlich bei nicht sehr grossen Bauten, dass die Rücksicht auf Einfachheit, Güte, Schnelligkeit und selbst Billigkeit der praktischen Ausführung für Träger mit constantem Querschnitt den Ausschlag giebt.

Bei einem nur zweifach gestützten Träger ist es auf die (genügend angenäherte) Berechnung der Schubkräfte und Spannungsmomente ohne Einfluss, ob der Querschnitt constant oder veränderlich ist, ob die beiden Unterstützungspunkte in genau gleicher oder etwas verschiedener Höhe liegen. Bei einem mehrfach gestützten Träger dagegen sind die Schubkräfte und Spannungsmomente wesentlich von der Art und Weise der Biegung, also sowohl von dem Aenderungsgesetz der Querschnitte, wie auch von der relativen Lage der Stützpunkte abhängig. Diese Umstände sprechen durchaus zu Gunsten der zweifach gestützten Brückenträger. Die in neuerer Zeit vielfach beliebten continuirlichen Träger erfordern Behufs rationeller Anordnung so umständliche Rechnungen, dass man sich zur Einführung vereinfachender willkürlicher Annahmen genöthigt sieht, wodurch es schon von vornherein unmöglich wird, die Anstrengungen der einzelnen Theile mit derselben Sicherheit wie bei zweifach gestützten Trägern anzugeben; besonders gross wird aber diese Unsicherheit durch den wesentlichen Einfluss, den eine sehr kleine Veränderung der relativen Höhe der Stützpunkte auf die Grössen X und $[X]$ ausübt: der Vortheil, welcher aus diesem Umstand für die Construction hergeleitet werden kann, indem die relativen Höhen der Auflagepunkte angemessen bestimmt werden, wird, da es sich hierbei um Differenzen von nur einigen Centimetern handelt, durch die Gefahr mehr als aufgewogen, welche mit einer der Berechnung nicht ganz genau entsprechenden Ausführung oder mit zufälligen späteren Aenderungen dieser Höhen verbunden ist. —

1. **Ein Träger liege auf 2 Stützen** A und $A_{,}$ in der Entfernung $AA_{,} = l$; x sei der Abstand AX eines beliebigen Querschnitts X vom Stützpunkt A, welches x unbeschadet der Allgemeinheit $< \frac{l}{2}$ vorausgesetzt werden kann, weil die grössten vorkommenden Schubkräfte und Spannungsmomente in je 2 Querschnitten gleich gross sind, welche auf entgegengesetzten Seiten der Trägermitte O in gleichen Abständen davon liegen.

Die zufällige Last (p'' pro Längeneinheit des Trägers) stellen wir uns als einen continuirlichen Zug vor, dessen Länge $> l$ ist und welcher in der Richtung $AA_{,}$ über die Brücke sich fortbewegt. Sobald das vordere Ende dieses Zuges den Stützpunkt A erreicht, beginnt eine allmählige Aenderung der

Schubkraft und des Spannungsmoments, welche im Querschnitt X unter der Einwirkung der permanenten Last (des Eigengewichts $= p'$ pro Längeneinheit des Trägers) dauernd stattgefunden hatten; diese Aenderung dauert so lange, bis das vordere Ende des Zuges den Stützpunkt $A_{,}$ erreicht, wonach die Grössen X und $[X]$ so lange constant bleiben als die vollständige Belastung dauert, d. h. der Zug auf der ganzen Brücke von A bis $A_{,}$ lastet; sobald aber das hintere Ende des Zuges den Stützpunkt A erreicht hat und sich gegen $A_{,}$ bewegt, erfahren X und $[X]$ eine abermalige stetige Veränderung, bis sie ihre ursprünglichen dauernden Werthe wieder annehmen, wenn das hintere Ende des Zuges den Punkt $A_{,}$ erreicht. Unterdessen hatte auch der mittlere Querschnitt die Trägermitte O verlassen und dem vorderen Ende des Zuges in der Richtung OA sich entgegenbewegt, sobald dieses den Punkt A in der Richtung AO überschritt; in einem gewissen Punkte M (*Fig. 61*) zwischen A und O treffen beide zusammen, von welchem Augenblicke an der mittlere Querschnitt seine Bewegungsrichtung umkehrt und, hinter dem vorderen Ende des Zuges sich herbewegend, die Trägermitte O wieder erreicht, sobald die zufällige Last die ganze Brücke überdeckt. Wenn aber darauf das hintere Ende der letzteren den Punkt A überschreitet, setzt sich vor ihm her der mittlere Querschnitt in der Richtung $OA_{,}$ wieder in Bewegung, bis er an einer gewissen Stelle $M_{,}$ in der Entfernung $OM_{,} = OM$ von der Trägermitte vom hinteren Ende des Zuges eingeholt wird; von diesem Augenblicke an kehrt der mittlere Querschnitt nach O zurück, während das hintere Ende des Zuges die noch übrige Strecke $M_{,}A_{,}$ auf der Brücke durchläuft.

Bewegte sich der Zug in der Richtung $A_{,}A$ über die Brücke hinweg, so würden die Grössen X und $[X]$ dieselben Werthe wie zuvor, aber in umgekehrter Reihenfolge, und es würde der mittlere Querschnitt dieselbe Bahn $OMM_{,}O$ wie zuvor, aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

Für den Abstand $AM = A_{,}M_{,} = m$ ergiebt sich:

$$\frac{m}{l} = -\frac{p'}{p''} + \sqrt{\frac{p'}{p''}\left(1 + \frac{p'}{p''}\right)} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

und ist hiernach z. B. für

$$\frac{p'}{p''} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad 1 \qquad 2$$

$$\frac{m}{l} = 0{,}309; \quad 0{,}366; \quad 0{,}414; \quad 0{,}449.$$

Je kleiner die Spannweite der Brücke ist, desto kleiner unter sonst gleichen Umständen ist $\frac{p'}{p''}$, desto kleiner also $\frac{m}{l}$, oder desto grösser in Vergleich mit l ist der Spielraum $MM_{,} = l - 2m$, in welchem der mittlere Querschnitt sich hin und herbewegt.

Das Spannungsmoment erreicht in jedem Querschnitt bei vollständiger Belastung ($p' + p'' = p$ pro Längeneinheit des ganzen Trägers) seinen grössten Werth:

$$[X] = p\frac{x(l-x)}{2}, \quad \text{wozu} \quad X = p\left(\frac{l}{2}-x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Die Schubkraft dagegen erreicht ihren grössten absoluten Werth bei einer solchen schiefen Belastung, bei welcher die zufällige, mobile Last von dem fraglichen Querschnitt X bis zu dem entfernteren Stüzpunkt A_1 reicht, und zwar ist dann:

$$X = p\left(\frac{l}{2}-x\right) + p''\frac{x^2}{2l}; \quad [X] = \left(p - p''\frac{x}{l}\right)\frac{x(l-x)}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

Zur leichteren Rechnung ist es häufig vorzuziehen, diesen letzten Ausdruck von X durch eine lineare Function der Abscisse, welche die Lage des betreffenden Querschnitts bestimmt, näherungsweise zu ersetzen, und ist dazu die Formel:

$$X = p\left[\mu + \xi\left(1 - \frac{2\mu}{l}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

zu empfehlen, in welcher

$$\xi = \frac{l}{2} - x; \quad \mu = \frac{l}{2} - m$$

ist. Man findet durch diese Formel zwar nur in den äussersten Querschnitten bei den Stützpunkten die grösste Schubkraft genau richtig $= \frac{pl}{2}$, in allen übrigen dagegen etwas zu gross, besonders in denjenigen der Strecke MM_1, was indessen um so weniger unangemessen ist, als der häufige Wechsel zwischen Zug und Druck in den betreffenden Constructionselementen das Material erfahrungsmässig empfindlicher angreift als ein beständiger Zug oder ein beständiger Druck von derselben Grösse. —

2. Ein Brückenträger liege auf beliebig vielen Stützen und habe dabei einen durchweg constanten Querschnitt.

Um die grösstmöglichen Werthe von X und $[X]$, welche in irgend einem Querschnitt vorkommen können, mit derselben Allgemeinheit wie bei dem zweifach gestützten Träger zu finden, müsste man alle diejenigen Werthe von X und $[X]$ mit einander vergleichen, welche in dem fraglichen Querschnitt nach und nach stattfinden, während ein Lastzug oder mehrere getrennte Lastzüge in kurzen Abständen von einander sich über die Brücke hinweg bewegen. Wenn dabei auch die Untersuchung dadurch etwas vereinfacht wird, dass, wie auch im vorigen Falle geschehen, die Länge jedes Lastzuges wenigstens = einer Oeffnungsweite (Entfernung zweier benachbarter Stützpunkte) vorausgesetzt wird, so würde sie doch immer noch sehr umständlich bleiben, und pflegt man sich deshalb damit zu begnügen, statt aller möglichen Längen und Lagen des Lastzuges nur diejenigen Längen und Lagen zu betrachten, wobei ganze Abtheilungen zwischen zwei Stützpunkten von dem Zuge belastet sind. Wenn also z. B. ein Träger dreifach unterstützt ist, so betrachtet man nur die 3 Fälle, dass die 1. oder die 2. Abtheilung oder die 1. und die 2. Abtheilung, d. h. der ganze Träger belastet ist; bei vierfacher Unterstützung hat man 7 Fälle zu betrachten: Belastung der 1., 2., 3. Abtheilung allein, der 1. und 2., 1. und 3., 2. und 3. Abtheilung zugleich, endlich die vollständige Belastung des ganzen Trägers.

Dass man bei diesem Verfahren für jeden Querschnitt die äussersten Werthe der Schubkraft und des Spannungsmoments, für jede Abtheilung die äussersten Lagen des mittleren Querschnitts und der Uebergangsquerschnitte genau finden müsse, würde eines eingehenden Beweises bedürfen; dass es aber wenigstens nahezu der Fall sein werde, erscheint *a priori* einleuchtend.

Die bei der Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers vorliegende Aufgabe, etwas verallgemeinert, betrifft sonach einen Träger, welcher mit im Allgemeinen verschiedenen Oeffnungsweiten auf beliebig vielen Stützen liegt und dessen Gesammtbelastung pro laufende Längeneinheit in jeder einzelnen Abtheilung constant, in den verschiedenen Abtheilungen aber beliebig verschieden ist. Diese Rechnung kann nach dem in §. 15 erklärten Navier'schen Verfahren ausgeführt werden, welches darin besteht, dass man zuerst die Reactionen der Stützpunkte ermittelt; wesentlich einfacher ist es aber, zunächst die Spannungsmomente in den Querschnitten über den Stützpunkten zu berechnen vermittelst einer in neuerer Zeit erst bekannt gewordenen Relation, welche zwischen den Spannungsmomenten über 3 aufeinander folgenden Stützpunkten, den Längen und Belastungen der zwischenliegenden Abtheilungen und endlich event. den Höhenunterschieden dieser Stützpunkte stattfindet.

Sind nämlich A, A_1, A_2 drei aufeinander folgende Stützpunkte:

l und l_1 die Längen der Abtheilungen AA_1 und A_1A_2,

p und p_1 die Gesammtbelastungen derselben pro Längeneinheit;

a, a_1, a_2 die Tiefen, in welchen die Punkte A, A_1, A_2 unterhalb einer horizontalen Coordinatenaxe OX liegen, deren Anfangspunkt O vertical über A liegt,

$\varDelta a = a_1 - a$; $\varDelta a_1 = a_2 - a_1$ die Höhenunterschiede; und werden mit

A, A_1, A_2 zugleich die vertical aufwärts gerichteten Reactionen der Stützpunkte, mit

$[A]$, $[A_1]$, $[A_2]$ die gesuchten Spannungsmomente in den Querschnitten über denselben und zwar deren algebraische Werthe bezeichnet, welche wegen der über den Stützpunkten nach Oben convexen Krümmung des Trägers negativ sind, so besteht die Relation:

$$-[A]l - 2[A_1](l+l_1) - [A_2]l_1 = \frac{pl^3 + p_1 l_1^3}{4} + 6EJ\left(\frac{\varDelta a_1}{l_1} - \frac{\varDelta a}{l}\right)$$

$$= \frac{pl^3 + p_1 l_1^3}{4} + 6EJ \cdot \varDelta\frac{\varDelta a}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 7),$$

wo ausserdem J das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Biegungsaxe, E den Elasticitätsmodul des Materials (in der Längenrichtung des Trägers) bedeutet. Setzt man diese Gleichung für je 3 aufeinander folgende Stützpunkte an, so hat man ebenso viel Gleichungen als Mittelstützen und kann daraus bei übrigens gegebenen Elementen die Spannungsmomente über ihnen berechnen, da über den Aussenstützen dieselben natürlich = Null sind.

Ist ferner M der mittlere Querschnitt der beliebigen Trägerabtheilung AA_1; m seine Entfernung von A; $[M]$ das Spannungsmoment in ihm, so findet man, wenn noch zur Abkürzung

$$[A_1] - [A] = \Delta [A]; \quad [A_2] - [A_1] = \Delta [A_1]$$

gesetzt wird:

$$m = \frac{l}{2} + \frac{\Delta [A]}{pl}; \quad [M] = [A] + \frac{pm^2}{2} \quad \text{. . . . . 8)};$$

und wenn ein Uebergangsquerschnitt mit N, seine Entfernung von A mit n bezeichnet wird, so ist:

$$n = m \pm \sqrt{m^2 + 2\frac{[A]}{p}} \quad \text{. . . . . 9)},$$

wo beide Vorzeichen gelten, indem es in jeder Abtheilung AA_1 zwei Uebergangsquerschnitte giebt. Dieselben liegen, wie man sieht, auf entgegengesetzten Seiten in gleichen Entfernungen vom mittleren Querschnitt.

In einem beliebigen Querschnitt X der Abtheilung AA_1 im Abstande x von A ist die Schubkraft und das Spannungsmoment:

$$X = p(m - x); \quad [X] = [A] + p\frac{x(2m - x)}{2} \quad \text{. . . . 10)};$$

schliesslich findet man den Druck auf den Stützpunkt A_1:

$$A_1 = \frac{pl + p_1 l_1}{2} + \frac{\Delta [A_1]}{l_1} - \frac{\Delta [A]}{l} = \frac{pl + p_1 l_1}{2} + \Delta \frac{\Delta [A]}{l} \quad \text{. . . 11)}.$$

Die Veränderlichkeit der Grössen X und $[X]$ wird durch eine graphische Darstellung sehr anschaulich gemacht, indem man über der Horizontalen AA_1 die den Abständen x von A entsprechenden Werthe von X und $[X]$ als orthogonale Ordinaten nach beliebigem Maassstabe aufträgt und deren Endpunkte durch einen stetigen Zug verbindet. Durch den aus Gl. 10) ersichtlichen einfachen geometrischen Charakter beider Curven wird die Ausführung dieser Darstellung sehr leicht. Die die Schubkräfte darstellende Linie ist eine gerade, und brauchen also zu ihrer Construction nur in den Endpunkten bei A und A_1 die Werthe von X aufgetragen zu werden. Die Curve der Spannungsmomente ist eine Parabel mit verticaler Axe und dem Parameter $\frac{2}{p}$; stellt man sich eine zu diesem Parameter gehörige Schablone her, so braucht man dieselbe, um die Parabel ziehen zu können, nur so anzulegen, dass sie bei verticaler Lage der Axe durch die Endpunkte der bei A und A_1 aufgetragenen Ordinaten $[A]$ und $[A_1]$ hindurchgeht. *Fig. 60* zeigt eine solche Darstellung, wobei positive Werthe von X und $[X]$ nach Oben, negative nach Unten aufgetragen sind. Wenn man diese Darstellung für alle Abtheilungen und auch für alle Belastungscombinationen ausführt (was um so leichter geschehen kann, als man dabei nur 2 Parabelschablonen mit den Parametern $\frac{2}{p'}$ und $\frac{2}{p' + p''}$ nöthig hat), und wenn man dann für jede Abtheilung die

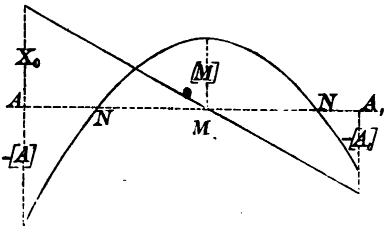


Fig. 60.

Umhüllungscurve aller Geraden $X = f(x)$ und diejenige aller Parabeln $[X] = F[x]$ zieht, so erhält man in denselben die graphischen Darstellungen der grösstmöglichen Werthe von X und $[X]$, welche in irgend einem Querschnitt vorkommen können, und es wird dadurch zugleich die Ungenauigkeit corrigirt, welche darin lag, dass man die analytische Vergleichung der unendlich vielen möglichen Belastungsarten durch diejenige einiger weniger ersetzt hatte. —

Wenn bei einem continuirlichen Brückenträger nicht die einzelnen Weiten zwischen den Pfeilern durch Localverhältnisse vorgeschrieben und nicht eine genau gleiche Höhe der Unterstützungspunkte vorausgesetzt oder verlangt wird, so bietet sich die Aufgabe dar, in der ersten oder zweiten oder in beiden Beziehungen zugleich diejenige Anordnung zu treffen, welche zum Zweck möglichster Materialersparniss die beste ist; es ist das diejenige, bei welcher die grösste resultirende Ausdehnung, die in irgend einem Punkte bei irgend einem Belastungszustande vorkommen kann, möglichst klein ausfällt. Streng genommen kann diese grösste resultirende Ausdehnung zugleich von dem Spannungsmoment und der Schubkraft des betreffenden Querschnitts abhängig sein. Bei den üblichen Verhältnissen der Träger, für welche die in Rede stehende Untersuchung in Frage kommt, hat übrigens das grösste Spannungsmoment irgend eines Querschnitts bei irgend einem Belastungszustande des Trägers, welches absolut genommen in Folgendem mit $[\Xi]$ bezeichnet werden soll — entsprechend der grösste Absolutwerth der Schubkraft eines Querschnitts mit Ξ — weit überwiegenden Einfluss auf die grösste Ausdehnung, so dass es Behufs einer angenäherten Lösung der Aufgabe genügt, die Anordnung so zu treffen, dass $[\Xi]$ ein Minimum wird, abgesehen davon, dass bei Berechnung von $[\Xi]$ die Berücksichtigung von nur einigen äussersten Belastungszuständen ausreicht. Uebrigens ist *a priori* klar, dass der vollkommenen Symmetrie wegen, welche bei den möglichen Belastungsarten bezüglich auf die Mitte des ganzen Trägers stattfindet, auch die Unterstützungspunkte symmetrisch in Beziehung auf die Querschnittsebene der Trägermitte angeordnet werden müssen, also der erste und letzte, zweite und vorletzte etc. in je einer Horizontalen und in gleichen Entfernungen von jener Mittelebene. Zugleich erfährt dadurch die Berechnung eine wesentliche Vereinfachung, indem nur die in einer Hälfte des Trägers vorkommenden Spannungsmomente, Schubkräfte und Auflagerpressungen, sowie die Lagen der mittleren und Uebergangsquerschnitte berechnet zu werden brauchen.

Die Anwendung der vorstehend angedeuteten Untersuchung auf die beiden einfachsten Fälle eines 2 und 3 Oeffnungen überdeckenden, also auf 3 und 4 Stützen liegenden Trägers ergiebt folgende Resultate:

a. Dreifach gestützter Träger.

Bei unbeschränkter Wahl sind die Stützen A, A_1, A_2 in gleiche Entfernung von einander zu legen, die beiden Aussenstützen zudem in gleiche Höhe; es sei $AA_1 = A_1A_2 = l$; die Senkung der Mittelstütze A_1 unter die Horizontale $AA_2 = a_1$. Die zulässige Grösse der letzteren, sowie auch der zulässige Werth des Verhältnisses $\frac{p'}{p}$ sind durch die praktische Rücksicht begrenzt, dass

bei keinem Belastungszustande der Träger von einer Stütze sich erheben oder dass, um ihn daran zu hindern, keine niederhaltende Befestigung durch Schraubenbolzen oder dergl. erforderlich sein darf; als Bedingung dafür findet man, wenn zur Abkürzung

$$\frac{48\,EJ}{l^4}\,a_1 = \pi \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

gesetzt wird:

$$p - 7p' < \pi < 10p'$$

jedenfalls also:

$$\frac{p'}{p} > \frac{1}{17} \quad . \quad . \quad . \quad 13).$$

In der einzig zu betrachtenden Trägerhälfte AA_1 kommen die grössten Spannungsmomente in dem Querschnitt bei A_1 und im mittleren Querschnitt M vor, und zwar tritt ersteres immer bei vollständiger Belastung des ganzen Trägers AA_2, letzteres im Allgemeinen bei einseitiger Belastung der Hälfte AA_1 ein, nämlich immer dann, wenn $\pi < 8p'$ ist. Diese beiden grössten Spannungsmomente sind:

$$-[A_1] = \left(2 - \frac{\pi}{p}\right)\frac{pl^2}{16}; \quad [M] = \left(7 - \frac{p' - \pi}{p}\right)^2 \cdot \frac{pl^2}{512} \quad . \quad . \quad . \quad 14).$$

Die Schubkraft erreicht ihre grössten Absolutwerthe in den Querschnitten bei A und A_1 bezüglich bei einseitiger Belastung von AA_1 und bei vollständiger Belastung des ganzen Trägers; dieselben sind:

$$A = \left(7 - \frac{p' - \pi}{p}\right)\frac{pl}{16}; \quad -A_1' = \left(10 - \frac{\pi}{p}\right)\frac{pl}{16} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15).$$

Zugleich ist A der grösstmögliche Druck auf die Aussenstütze; der grösste Druck auf die Mittelstütze dagegen, welcher bei vollständiger Belastung eintritt, ist: $A_1 = -2A_1'$.

Der mittlere Querschnitt M hat seinen kleinsten Abstand m' von der Aussenstütze A immer dann, wenn die andere Abtheilung A_1A_2 des Trägers belastet, seinen grössten Abstand m'' immer dann, wenn A_1A_2 unbelastet ist; was dagegen die Abtheilung AA_1 selbst betrifft, so hängt es von dem Verhältniss zwischen p', p und π ab, ob der Minimal- oder Maximalwerth von m im Zustande der Belastung oder der Nichtbelastung von AA_1 eintritt. Man findet,

wenn $\pi < p'$ ist: $m' = \left(7 - \frac{p - \pi}{p'}\right)\frac{l}{16}$; $m'' = \left(7 - \frac{p' - \pi}{p}\right)\frac{l}{16}$

„ $p' < \pi < p$ „ $m' = \left(7 - \frac{p - \pi}{p'}\right)\frac{l}{16}$; $m'' = \left(6 + \frac{\pi}{p'}\right)\frac{l}{16}$

„ $\pi > p$ „ $m' = \left(6 + \frac{\pi}{p}\right)\frac{l}{16}$; $m'' = \left(6 + \frac{\pi}{p'}\right)\frac{l}{16}$.

Der mittlere Querschnitt M liegt übrigens stets in der Mitte zwischen der Aussenstütze A und dem Uebergangsquerschnitt N, d. h. es ist $n = 2m$. —

Je nach der Senkung der Mittelstütze kann von den beiden relativ grössten Spannungsmomenten $-[A_1]$ und $[M]$ das eine oder andere das absolut grösste

sein. Wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen, in welchem Falle die Bedingung 13) erfordert dass $\frac{p'}{p} > \frac{1}{7}$ ist, so findet das absolut grösste Spannungsmoment sowohl als die absolut grösste Schubkraft im Querschnitt über der Mittelstütze bei vollständiger Belastung des ganzen Trägers statt, und zwar ist:

$$[\Xi] = \frac{pl^2}{8}; \quad \Xi = \frac{5}{8}pl \quad \ldots \ldots \quad 16).$$

Wird aber die Mittelstütze gesenkt, so nimmt das grösste Spannungsmoment im Querschnitt bei A_1 ab, im mittleren Querschnitt dagegen zu, bis, wenn beide einander gleich geworden sind, die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze erreicht ist. Dieser Bedingung entsprechend ergiebt sich in der Voraussetzung, dass $\pi < 8p'$ und deshalb der Ausdruck von $[M]$ sub 14) das wahre Maximalmoment im mittleren Querschnitt ist:

$$\frac{\pi}{p} = -25 + \frac{p'}{p} + 4\sqrt{2\left(17 - \frac{p'}{p}\right)}; \quad a_1 = \frac{\pi}{p}\,\frac{pl^4}{48\,EJ} \quad \ldots \quad 17).$$

Mit diesem Werthe von $\frac{\pi}{p}$ findet man $[\Xi] = -[A_1]$ aus 14). Die absolut grösste Schubkraft ist noch immer diejenige, welche bei vollständiger Belastung im Querschnitt A_1 stattfindet und aus 15) vermittelst 17) gefunden wird; auch sie ist etwas kleiner als bei gleicher Höhe der Stützen. Uebrigens ist der durch die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze zu erzielende Gewinn wesentlich von dem Verhältniss $\frac{p'}{p}$ abhängig, wie nachstehende Tabelle zeigt.

$\frac{p'}{p''} =$	$1/10$	$1/4$	$1/2$	1	2	∞	
$\frac{p'}{p} =$	$1/11$	$1/5$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	1	
$\frac{\pi}{p} =$	0,352	0,386	0,427	0,478	0,529	0,628	
$[\Xi] =$	0,824	0,807	0,786	0,761	0,736	0,686	$\times \frac{pl^2}{8}$
$A =$	3,631	3,593	3,547	3,489	3,431	3,314	$\times \frac{pl}{8}$
$\Xi = -A'_1 =$	4,824	4,807	4,786	4,761	4,736	4,686	

Man sieht daraus, dass durch die Senkung der Mittelstütze ein um so grösserer Gewinn erzielt werden kann, je grösser p' in Vergleich mit p'', je grösser also die Spannweite l ist; und zwar beträgt der durch die Continuität des Trägers und Senkung der Mittelstütze zusammen, also der im Vergleich mit 2 isolirten Trägern von der Länge l, oder auch der im Vergleich mit einem auf 3 gleich hohen Stützen liegenden continuirlichen Träger durch die Senkung der Mittelstütze allein erreichbare Vortheil, was die Spannungsmomente betrifft, 18 bis 31 %.

Uebrigens lässt sich aus der Tabelle für das vortheilhafteste Verhältniss $\frac{\pi}{p}$ die einfache empirische Formel:

$$\frac{\pi}{p} = 0{,}325 + 0{,}305\frac{p'}{p} \qquad 17a)$$

entnehmen, welche sich der theoretischen Formel 17) fast durchweg mit einer Genauigkeit von 3 Decimalstellen anschliesst. Dieselbe lehrt zugleich, dass $\frac{p'}{p} > \frac{1}{10{,}8}$ sein muss, wenn bei keinem Belastungszustande eine Erhebung des lose aufliegenden Trägers von einer Stütze soll stattfinden können, und dass dann auch $\pi < 3{,}815\,p'$, um so mehr also die Voraussetzung $\pi < 8p'$ erfüllt ist, auf welcher die vorstehende Berechnung von $\frac{\pi}{p}$ beruht. —

Zur Gewinnung einer ungefähren Anschauung der Grösse a_1 sei beispielsweise für eine zweigleisige Eisenbahnbrücke, welche von zwei schmiedeisernen Hauptträgern getragen wird:

	$l =$ 25	50	75	100	Meter
	$p' =$ 1000	2000	3000	4000	Kilogr.
	$p'' =$ 3000	3000	3000	3000	„
so ist	$p =$ 4000	5000	6000	7000	„
	$\frac{p'}{p} = 1/4$	$2/5$	$1/2$	$4/7$	
und nach 17a)	$\frac{\pi}{p} =$ 0,401	0,447	0,478	0,499	
nach 14)	$[\Xi] =$ 0,799	0,776	0,761	0,750	$\times \frac{pl^2}{8}$.

Wenn dieser Coefficient von $\frac{pl^2}{8}$ mit ξ bezeichnet wird, so erhält man aus der nach §. 7 verständlichen Gleichung:

$$[\Xi] = \xi \cdot \frac{pl^2}{8} = k\frac{J}{e},$$

wenn noch $e =$ der halben Höhe des Trägers $= \frac{l}{20}$ gesetzt wird:

$$J = \xi\frac{pl^3}{160k}$$

und durch Substitution in 17):

$$a_1 = \frac{\pi}{p} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{10\,lk}{3E}.$$

Für $E = 2000000$; $k = 650$ Kilogr. pro Quadratcentim.

und	$l = 2500$	5000	7500	10000 Centim.
ergiebt sich sonach:	$a_1 = 1{,}36$	3,12	5,10	7,22 „
	$= 0{,}54$	0,62	0,68	$0{,}72 \times \frac{l}{1000}$.

b. Vierfach gestützter Träger.

Indem wieder eine durch keine Nebenbedingungen *a priori* beschränkte Anordnung der Stützpunkte A, A_1, A_2, A_3, dieselbe demnach als symmetrisch vorausgesetzt wird, seien die beiden Aussenöffnungen $AA_1 = A_2A_3 = l$, die Mittelöffnung $A_1A_2 = l_1$; die Senkungen der beiden Mittelstützen A_1 und A_2 unter die Horizontale $AA_3 = a_1$. Die praktischen Grenzen dieser Senkung, welche der Bedingung entsprechen, dass bei keinem Belastungszustande der lose aufliegende Träger von einem Pfeiler sich erheben darf, werden, wenn zur Abkürzung hier

$$\frac{l_1}{l} = \lambda; \quad \frac{24\,EJ}{l^4}\,a_1 = \pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

gesetzt wird, durch die folgende Vergleichung gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^3 p - 3(1+2\lambda)p' < \pi < \dfrac{(1+\lambda)^2\cdot(1+4\lambda+\lambda^2)}{\lambda}p' - \dfrac{1+\lambda}{\lambda}p; \\ \text{dieselbe verlangt vor Allem:} \\ \qquad \dfrac{p'}{p} > \dfrac{1+\lambda+\lambda^4}{1+9\lambda+16\lambda^2+6\lambda^3+\lambda^4} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 19);$$

z. B. für	$\lambda = 0{,}7$	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
	$\frac{p'}{p} > \frac{1}{9{,}0}$	$\frac{1}{9{,}9}$	$\frac{1}{10{,}6}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11{,}1}$	$\frac{1}{11{,}1}$	$\frac{1}{10{,}8}$.

Der Symmetrie wegen sind als relativ grösste Spannungsmomente nur diejenigen in Betracht zu ziehen, welche in dem Querschnitt über der Stütze A_1 und in den mittleren Querschnitten M und M_1 der ersten und zweiten Oeffnung (AA_1 und A_1A_2) stattfinden. Das erste erreicht seinen grössten Werth, wenn die mobile Last nur die erste und zweite Oeffnung überdeckt, und zwar:

$$-[A_1] = \frac{2+2\lambda+2\lambda^3+\lambda^4 - \dfrac{\lambda p' + (2+\lambda)\,\pi}{p}}{(2+\lambda)(2+3\lambda)} \cdot \frac{p\,l^2}{4} \quad \ldots \quad 20).$$

Im mittleren Querschnitt der ersten Oeffnung ist das Spannungsmoment im Allgemeinen dann am grössten und zwar:

$$[M] = \left(\frac{3(1+2\lambda) - \dfrac{\lambda^3 p' - \pi}{p}}{2+3\lambda}\right)^2 \cdot \frac{p\,l^2}{32} \quad \ldots\ldots \quad 21),$$

wenn die beiden Aussenöffnungen allein belastet sind; gewiss ist dies der Fall, wenn man hat:

$$n < \left(\frac{2(3+7\lambda+3\lambda^2)}{2+\lambda}+\lambda^3\right)p' - \frac{\lambda}{2+\lambda}p \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 22).$$

Im mittleren Querschnitt M_1 der Mittelöffnung A_1A_2 ist im Allgemeinen und zwar jedenfalls, wenn, die Bedingungen 19) als erfüllt vorausgesetzt, λ nicht $< \frac{4}{5}$ ist, das Spannungsmoment dann am grössten, wenn nur die Mittelöffnung von der mobilen Last überdeckt wird; es ist dann:

$$[M_1] = \frac{(2+\lambda)\lambda^2 - 2\frac{p'-n}{p}}{2+3\lambda}\cdot\frac{pl^2}{8} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 23).$$

Ohne Bedingung lassen sich die Belastungszustände angeben, bei welchen die stets relativ grössten Schubkräfte bei A und A_1 ihre grössten Werthe erreichen. Bei A ist es der Fall, wenn nur die beiden Aussenöffnungen von der mobilen Last überdeckt sind, und zwar ist dann:

$$A = \frac{3(1+2\lambda) - \frac{\lambda^3 p' - n}{p}}{2+3\lambda}\cdot\frac{pl}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 24).$$

Bei A_1 müssen die beiden Querschnitte mit den Schubkräften A_1' und A_1'' unterschieden werden, welche bezüglich als letzter der ersten und als erster der zweiten Oeffnung diesseits und jenseits des Stützpunktes A_1 liegen; in beiden ist bei Belastung nur der ersten und zweiten Oeffnung die Schubkraft am grössten, und zwar:

$$\left.\begin{aligned} -A_1' &= \frac{10+18\lambda+6\lambda^2+2\lambda^3+\lambda^4 - \frac{\lambda p' + (2+\lambda)n}{p}}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\cdot\frac{pl}{4} \\ A_1'' &= \frac{1+4\lambda^2+2\lambda^3 - \frac{p'}{p}}{(2+\lambda)\lambda}\cdot\frac{pl}{4} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 25).$$

Zugleich ist A der grösste Druck auf die Stütze A; derjenige auf A_1 aber: $A_1 = -A_1' + A_1''$.

Der mittlere Querschnitt M erreicht seinen kleinsten Abstand m' von A bei Belastung entweder nur der zweiten oder der ersten und zweiten Oeffnung, je nachdem

$$n \lesseqgtr \lambda^3 p - \frac{\lambda}{2+\lambda}p' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 26)$$

ist, und zwar ist dann resp.

$$m' = \left\{\begin{aligned} &\frac{3(1+2\lambda) - \frac{\lambda^3 p - n}{p'}}{2+3\lambda}\cdot\frac{l}{4} \\ &\frac{6+14\lambda+6\lambda^2-2\lambda^3-\lambda^4+\frac{\lambda p' + (2+\lambda)n}{p}}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\cdot\frac{l}{4} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 27).$$

Seinen grössten Abstand m'' von A erreicht er bei Belastung entweder der ersten und dritten Oeffnung zusammen oder der dritten Oeffnung allein, je nachdem

$$\pi \gtreqless \lambda^3 p' - \frac{\lambda}{2+\lambda} p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

ist, und zwar ist dann resp.

$$m'' = \begin{cases} \dfrac{3(1+2\lambda) - \dfrac{\lambda^3 p' - \pi}{p}}{2+3\lambda} \cdot \dfrac{l}{4} \\[2ex] \dfrac{6+14\lambda+6\lambda^2-2\lambda^3-\lambda^4+\dfrac{\lambda p+(2+\lambda)\pi}{p'}}{(2+\lambda)(2+3\lambda)} \cdot \dfrac{l}{4} \end{cases} \quad \ldots \quad 29).$$

Endlich ist der Abstand $A_1 M_1 = m_1$ des mittleren Querschnitts der Mittelöffnung von der Stütze A_1 stets am kleinsten $= m'_1$ bei Belastung der dritten, am grössten $= m''_1$ bei Belastung der ersten Oeffnung allein; und zwar ist:

$$\left.\begin{matrix} m'_1 \\ m''_1 \end{matrix}\right\} = \left(2\lambda \mp \frac{p-p'}{(2+\lambda)\lambda p'}\right) \cdot \frac{l}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30).$$

Wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen, so hat man in vorstehenden Formeln nur $\pi = 0$ zu setzen. Damit der Träger von keiner Stütze sich erheben könne, muss nach 19),

$$\left.\begin{aligned} &\text{wenn } \lambda < 0{,}93 \text{ ist: } \frac{p'}{p} > \frac{1}{(1+\lambda)(1+4\lambda+\lambda^2)} \\ &\text{wenn } \lambda > 0{,}93 \text{ ist: } \frac{p'}{p} > \frac{\lambda^3}{3(1+2\lambda)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

sein, z. B. für $\lambda =$ 0,8	0,9	0,93	1	1,1	1,2
$\frac{p'}{p} > \frac{1}{8,7}$	$\frac{1}{10,3}$	$\frac{1}{10,7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7,2}$	$\frac{1}{5,9}$

Sind diese Bedingungen erfüllt, und ist zudem $\lambda \gtreqless \frac{4}{5}$, so findet sich auch die Ungleichung 22) stets erfüllt, und es gelten also für die Maximalmomente $[M]$ und $[M_1]$ die Formeln 21) und 23).

Von Interesse ist dabei die Frage nach dem vortheilhaftesten Verhältniss $\lambda = \frac{l_1}{l}$ der Oeffnungsweiten, und sie ist es um so mehr, als die von der Theorie gegebene Antwort dem auf einer falschen Ueberlegung beruhenden Gebrauch entgegengesetzt ist; während es nämlich in der Praxis bisher üblich war, die Oeffnungsweiten entweder einander gleich oder die Aussenöffnungen bis im Verhältniss 4 : 5 kleiner als die Mittelöffnung zu machen, lehrt die Theorie, dass umgekehrt $l > l_1$ sein muss, wenn das grösste Spannungsmoment möglichst klein werden soll.

Welches der 3 hierbei in Betracht kommenden Maximal-Spannungsmomente: $-[A_1]$, $[M]$ und $[M_1]$ das grösste ist und deshalb durch einen angemessen zu bestimmenden Werth von λ zu einem Minimum gemacht werden muss, lässt sich *a priori* nicht sagen, da bei anderen Werthen von λ ein anderes jener Momente das grösste sein kann. Wenn aber eines jener 3 Spannungsmomente die Eigenschaft hätte, dass der kleinste Werth, den es bei Veränderung von λ innerhalb der zulässigen Grenzen annimmt, grösser ist als die demselben λ entsprechenden Werthe der beiden anderen sind, so ist klar, dass dieser der kleinstmögliche Werth des absolut grössten Spannungsmoments im ganzen Träger und das entsprechende λ das vortheilhafteste Verhältniss der Oeffnungsweiten wäre. Die fragliche Eigenschaft hat nun das Maximal-Spannungsmoment über der Stütze A_1, wie nachstehende Tabelle* erkennen lässt.

$\frac{p'}{p}$ =	0,2	0,4	0,6	0,8	1
λ =	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86
$-[A_1]$ =	0,90	0,87	0,84	0,81	0,78 $\times \frac{pL^2}{72}$
$[M]$ =	0,82	0,80	0,78	0,76	0,74 $\times$ „
$[M_1]$ =	0,44	0,34	0,24	0,14	0,03 $\times$ „

Dabei ist λ der Bedingung gemäss berechnet, dass das bei Belastung der ersten und zweiten Oeffnung eintretende, durch Gl. 20) gegebene Spannungsmoment $-[A_1]$ ein Minimum werde, welche Bedingung für λ die Gleichung liefert:

$$14\lambda^4 + 40\lambda^3 + \left(6 + 9\frac{p'}{p}\right)\lambda^2 - \left(32 - 4\frac{p'}{p}\right)\lambda - \left(16 + 4\frac{p'}{p}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; 32).$$

Die diesen Werthen von λ entsprechenden Werthe der drei ausgezeichneten Spannungsmomente sind alsdann nach den Gleichungen 20), 21) und 23) berechnet, und zwar sind sie angegeben im Verhältniss zu dem Maximal-Spannungsmoment

$$= \frac{p\left(\frac{2l + l_1}{3}\right)^2}{8} = \frac{pL^2}{72},$$

welches in jedem von 3 isolirten Trägern eintreten würde, die unter sich gleich lang sind und zusammen die Länge $L = 2l + l_1$ des gegebenen Trägers haben.

Aus der Tabelle sieht man, dass sich mit genügender Annäherung setzen lässt:

$$\lambda = 0{,}91 - 0{,}05\frac{p'}{p}; \quad [\Xi] = \left(0{,}93 - 0{,}15\frac{p'}{p}\right)\frac{pL^2}{72} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 33),$$

* Einem Aufsatz des Ingenieur-Assistenten MOHR in der Zeitschr. d. Archit. u. Ingen. Vereins f. d. Königr. Hannover, Jahrg. 1860, S. 416 entnommen.

und aus der Vergleichung mit 31), dass die dieser ganzen Rechnung zu Grunde liegenden Voraussetzungen erfüllt sind, wenn man hat: $\frac{p'}{p} > \frac{1}{10,3}$.

Man sieht ferner, dass durch die Continuität bei gleicher Höhe der Stützen ein Vortheil von 8 bis 22 % im Vergleich mit isolirten Trägern erzielt werden kann, und dass der Vortheil um so grösser ist, je grösser $\frac{p'}{p}$, je grösser also der ganze Träger ist.

Wenn man übrigens die 3 Abtheilungen des continuirlichen Trägers gleich lang, also $\lambda = 1$ macht (in welchem Falle die Bedingungen 31) erfordern, dass $\frac{p'}{p} > \frac{1}{9}$ sei), so wird dadurch der Vortheil nur sehr wenig vermindert. Das bei Belastung der ersten und zweiten Abtheilung über der zweiten Stütze stattfindende Spannungsmoment, von dem man sich leicht überzeugt, dass es auch in diesem Falle das absolut grösste für irgend einen Querschnitt und irgend einen Belastungszustand ist, wird nämlich:

$$-[A_1] = \frac{2\left(7 - \frac{p'}{p}\right)}{15} \frac{p l^2}{8} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 34)$$

z. B. für $\frac{p'}{p} = 0,2$	0,4	0,6	0,8	1
$-[A_1] = 0,91$	0,88	0,85	0,83	$0,80 \times \frac{p l^2}{8}$

Um die 3 relativ grössten Spannungsmomente gleich gross und dadurch das absolute Maximum $[\Xi]$ des Spannungsmoments so klein als möglich zu machen, muss ausser der angemessenen Vertheilung der Mittelstützen A_1 und A_2 unter der Gesammtlänge L des Trägers noch die Senkung dieser Stützen unter die Horizontale AA_3 der Endstützen zu Hülfe genommen werden. Nimmt man dabei vorläufig an, dass die relativen Maximalmomente $[M]$ und $[M_1]$ bezüglich bei Belastung beider Aussenöffnungen und bei Belastung der Mittelöffnung eintreten, mithin durch die Gl. 21) und 23) gegeben werden, so liefern die beiden Bedingungen:

$$-[A_1] = [M_1]; \quad [M] = [M_1]$$

die folgenden 2 Gleichungen zur Berechnung der Verhältnisse λ und $\frac{\pi}{p}$ für ein gegebenes Verhältniss $\frac{p'}{p}$:

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & 272 + 2048\lambda + 3296\lambda^2 + 128\lambda^3 - 2360\lambda^4 - 1408\lambda^5 - 248\lambda^6 + \lambda^8 \\ & + 8\,(92 + 256\lambda + 196\lambda^2 - 8\lambda^3 - 155\lambda^4 - 104\lambda^5 - 20\lambda^6 - 2\lambda^7 - \lambda^8)\frac{p'}{p} \\ & + 16\,(1 - 4\lambda^3 - 2\lambda^4 + 4\lambda^6 + 4\lambda^7 + \lambda^8) \cdot \left(\frac{p'}{p}\right)^2 \\ \frac{\pi}{p} = {} & \frac{4 + 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^4 + 4\frac{p'}{p}}{4\,(2 + \lambda)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35).$$

Eine Reihe von Werthen der Verhältnisse λ und $\frac{\pi}{p}$, welche diesen Gleichungen entsprechend berechnet wurden, nebst zugehörigen Werthen von $[\Xi]$, enthält die nachfolgende Tabelle *:

$\frac{p'}{p}$ =	0,2	0,4	0,6	0,8	1
λ =	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$\frac{\pi}{p}$ =	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$[\Xi]$ =	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61 $\times \frac{pL^2}{72}$.

Hiernach und mit Rücksicht auf Gl. 18) lässt sich mit genügender Genauigkeit setzen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 1,13 + 0,04\frac{p'}{p} \\ \frac{\pi}{p} &= 0,4 + 0,32\frac{p'}{p};\quad a_1 = \frac{pl^4}{60\,EJ}\left(1 + \frac{4}{5}\frac{p'}{p}\right) \\ [\Xi] &= \left(0,82 - 0,21\frac{p'}{p}\right)\frac{pL^2}{72} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 36).$$

Vermittelst dieser Werthe von λ und $\frac{\pi}{p}$ findet man nachträglich, dass die Bedingungen 19) für das beständige Aufliegen des Trägers auf allen Stützen und um so mehr die Bedingungen dafür, dass die Maximalmomente $[M]$ und $[M_1]$ durch die oben benutzten Gleichungen 21) und 23) dargestellt werden, erfüllt sind, wenn $\frac{p'}{p} > \frac{1}{9,5}$ ist.

Aus der Tabelle ersieht man, dass durch die Continuität bei vortheilhaftester Vertheilung und Senkung der Mittelstützen ein Vortheil von 20 bis 39 % im Vergleich mit isolirten Trägern erzielt werden kann, und dass der erreichbare Vortheil mit $\frac{p'}{p}$, also mit der Grösse des Trägers wächst. —

Aus der Vergleichung der Rechnungen, welche bezüglich auf einen mit 2 und 3 Abtheilungen, also drei- und vierfach unterstützten Brückenträger im Vorhergehenden angedeutet wurden, lässt sich schätzen, in welchem Maasse die Schwierigkeiten sich steigern würden, wenn man einen auf noch mehr als 4 Stützen liegenden Träger mit derselben Gründlichkeit wie die beiden betrachteten Fälle berechnen wollte. Für diese freilich würden die auszuführenden Rechnungen sich reichlich lohnen, wenn der rechnungsmässig im Vergleich mit isolirten Trägern bei gleicher Pfeilerzahl erreichbare Vortheil von 18 bis 31 %

* Siehe den oben erwähnten Aufsatz von MOHR in der Zeitschr. des hannov. Archit. u. Ing. Vereins.

bei dreifacher, 20 bis 39% bei vierfacher Unterstützung nicht eben durch denselben Umstand wieder illusorisch würde, wodurch er hauptsächlich erreichbar wurde: durch den sehr empfindlichen Einfluss nämlich, den geringfügige Aenderungen in der Höhenlage der Stützen auf die Grösse des Maximalmomentes [Ξ] ausüben. Wenn wir z. B. gefunden haben, dass bei einem dreifach gestützten Träger eine Senkung der Mittelstütze um $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ pro Mille der Oeffnungsweite oder (bei den üblichen Verhältnissen) von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$% der Trägerhöhe ausreichend ist, um eine Verminderung des grössten Spannungsmoments von 18 bis 31% hervorzubringen, so würde eine ungefähr ebenso grosse Vermehrung desselben die Folge sein, wenn bei dem unter der Voraussetzung der vortheilhaftesten Höhenlage der Mittelstütze berechneten Träger diese Höhe in Wirklichkeit um dieselbe geringe Grösse = $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$% der Trägerhöhe nach der einen oder anderen Richtung hin von dem vorausgesetzten Betrage abwiche. Eine solche Abweichung kann, abgesehen von Beobachtungsfehlern bei der Aufstellung, eine zweifache Ursache haben: sie kann entweder davon herrühren, dass durch Nachgeben des Fundaments, Setzen des Mauerwerks und Temperatureinflüsse die Pfeiler mit den auf ihnen angebrachten Stützpunkten sich in verschiedenem Maasse senken oder heben; oder auch davon, dass diejenigen Punkte in der Unterkante des Trägers, welche mit den Stützpunkten auf den Pfeilern in Berührung kommen, im spannungslosen Zustande des Trägers (entgegen der stillschweigend stets zu Grunde liegenden Voraussetzung) nicht genau in einer geraden Linie liegen. Während Abweichungen der ersten Art verhältnissmässig leicht entdeckt werden können, sind solche der zweiten Art, die in einer mangelhaften Ausführung des Trägers selbst ihren Grund haben, nur vor seiner Aufstellung, wenn er umgekantet flach auf ebenem Boden liegt, direct erkennbar; in ihrem Einfluss auf die Inanspruchnahme des Trägers verhalten sich beide ganz gleich, und hat es z. B. denselben Erfolg, wenn bei einem dreifach gestützten Träger die Mittelstütze um 3 Centimeter zu tief liegt, oder wenn die Unterfläche des Trägers im spannungslosen Zustande, anstatt ganz eben gemacht zu werden, um 3 Centimeter in der Mitte überhöht wird. —

Eine fernere Schwierigkeit entsteht bei der Berechnung continuirlicher Träger dadurch, dass in Wirklichkeit dieselben nicht, wie bisher angenommen, in Punkten oder vielmehr geraden Linien, sondern in mehr oder weniger breiten Flächen aufliegen. Freilich entsteht auch schon bei Trägern über einer Oeffnung die Frage, wie man sich hinsichtlich dieses Umstandes zu verhalten habe; doch ist sie hier leicht in praktisch genügender Weise zu beantworten. Wenn das Auflager und der Träger an seinen Enden aus unpressbarem Material beständen, so würde (bei horizontaler ebener Auflagerfläche) der ganze Auflagerdruck in Folge der Biegung des Trägers von der inneren Auflagerkante aufgenommen werden; die in Wirklichkeit stattfindende Compression aber vertheilt die Pressung auf einen gewissen Flächenstreifen. Sofern übrigens dieser im Allgemeinen nur schmal ist und wegen der ungleichen Vertheilung des Drucks in ihm die Angriffslinie des resultirenden Drucks jedenfalls um weniger als die Hälfte dieser geringen Breite

von der Auflagerkante abliegt, so ist es im Allgemeinen, d. h. wenn nicht besondere Eigenthümlichkeiten der Auflager andere Annahmen nöthig machen, zulässig, den zweifach unterstützten Träger ebenso wie einen auf zwei Stützlinien liegenden zu berechnen und dabei die letzteren entweder mit den inneren Auflagerkanten zusammenfallend oder nach Schätzung in geringer Entfernung von denselben anzunehmen.

Bei einem continuirlichen Träger über mehreren Oeffnungen verhalten sich die Endauflager gerade so wie bei einem Träger über einer Oeffnung. Was aber die Zwischenauflager betrifft, so muss man jedes derselben entsprechender Weise durch 2 Auflagerlinien ersetzt denken, welche mit den äusseren Kanten der Auflagerfläche zusammenfallen oder in geringer Entfernung davon liegen; man befindet sich also in der unangenehmen Lage, einen 3, 4 . . fach unterstützten Träger wie einen 4, 6 . . fach unterstützten berechnen zu müssen, und es ist dies in der That zur Erlangung von genügend zuverlässigen Resultaten unerlässlich, wenn die mittleren Auflagerflächen ziemlich breit sind. Das gewöhnliche Verfahren, diese Breite ganz zu vernachlässigen, hat man wohl dadurch zu verbessern gesucht, dass man, ausgehend von der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung des Drucks auf der Auflagerbreite, nur deren Hälfte vernachlässigt und je eine der beiden übrigen Viertel-Breiten der angrenzenden Oeffnungsweite zurechnet; eine einfache Probe lässt jedoch das Ungenügende dieser vermeintlichen Correction erkennen, durch welche man sich sogar weiter von der Wahrheit entfernen kann, als durch das Verfahren, welches corrigirt werden sollte. —

Bei den bisher erwähnten, die continuirlichen Träger betreffenden Rechnungen und Gesetzen ist vorausgesetzt, dass dieselben dem üblichen Verfahren gemäss vor ihrer Aufstellung vollständig fertig gemacht werden: nur unter dieser Voraussetzung verhalten sie sich wie einfache Balken, und gilt auch nur für diesen Fall die oben gemachte Bemerkung, dass die mit den Stützen in Berührung kommenden Linien der Unterfläche des Trägers im spannungslosen Zustande desselben genau in einer Ebene liegen müssen, weil Abweichungen von dieser Bedingung denselben schädlichen Einfluss ausüben wie gleich grosse Abweichungen von der richtigen Höhenlage der Stützen. Nun hat aber Hr. Mohr darauf aufmerksam gemacht, wie man von dieser in Wirklichkeit schwer zu erfüllenden Bedingung durch ein anderes Herstellungs- und Aufstellungsverfahren sich unabhängig machen und so wenigstens einen der hervorgehobenen Mängel continuirlicher Träger beseitigen könne. Dieses Verfahren besteht darin, dass man die den einzelnen Oeffnungen der Brücke entsprechenden Trägerstrecken zunächst isolirt über ihnen aufstellt, dieselben der Wirkung ihres Eigengewichts überlässt, darauf die Continuität durch Zusammennieten der Gurtungen und der Blech- oder Fachwerkwand über den Mittelpfeilern (ohne gewaltsames Zusammenholen der zu verbindenden Theile) herstellt, und endlich die vortheilhafteste Höhenlage der Stützpunkte durch die Entfernung provisorischer Unterlagsplatten von genau bestimmter Dicke erreicht, welche vor der Aufstellung auf die zur bleibenden Unterlage bestimmten Schuhe etc. gelegt worden waren. Abgesehen von der Ersparung an Gerüstkosten, indem man dasselbe Gerüst

für mehrere Oeffnungen nach einander benutzen kann, hat diese Aufstellungsmethode zugleich den Vortheil, dass auch die Höhenlage der Stützen vor Herstellung der Continuität ohne Einfluss auf die Inanspruchnahme des Trägers ist, mithin nur die Aenderungen ihre Schädlichkeit behalten, welche nachträglich bei der fertigen Brücke durch die für verschiedene Pfeiler verschiedene Senkung des Fundaments, Sackung des Mauerwerks und Ausdehnung desselben durch Temperaturveränderungen herbeigeführt werden können.

Bei der Berechnung eines Trägers, dessen Continuität auf solche Weise hergestellt wurde, lassen sich die früheren Formeln benutzen, wenn dabei nur beachtet wird, dass unter der blossen Wirkung des Eigengewichts derselbe Spannungszustand in ihm stattfindet wie in einem vor der Aufstellung fertig gemachten Träger, bei welchem man die Mittelstützen so weit senkt, dass in den Querschnitten über ihnen unter der blossen Wirkung des Eigengewichts die Spannungsmomente = Null werden.

Bei einem dreifach mit 2 gleichen Oeffnungsweiten unterstützten Träger gelten hiernach auch im vorliegenden Falle die Bedingung 13), die Gleichungen 14) und 15), sowie die früheren Ausdrücke von m' und m'', falls nur darin, unter a_1 die nachträgliche Senkung der Mittelstütze und unter π den Ausdruck 12) verstanden,

$$2p' + \pi \text{ statt } \pi$$

gesetzt wird. Durch angemessene Wahl von a_1 kann ganz derselbe vortheilhafteste Spannungszustand wie bei dem gewöhnlichen Aufstellungsverfahren erreicht werden; nur ist die erforderliche Grösse von a_1 hier bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{\pi}{p} = \frac{48\,EJ}{pl^4} \cdot a_1 = 0{,}325 - 1{,}695\frac{p'}{p} \quad \ldots\ldots \quad 37).$$

Wenn hiernach a_1 negativ ausfällt, was für $\frac{p'}{p} > \frac{1}{5{,}2}$, also gewöhnlich der Fall sein wird, so muss die vortheilhafteste Lagerung durch eine dem Absolutwerth von a_1 gleiche Erniedrigung der Aussenstützen mittelst Wegnahme entsprechend dicker provisorischer Unterlagsplatten erreicht werden, was im Erfolg einer ebenso grossen nachträglichen Erhebung der Mittelstütze gleich kommt.

Bei einem auf die angegebene Weise auf 4 symmetrisch liegenden Stützen aufgestellten Träger behalten die Bedingungen 19) und 22), sowie die Gleichungen 20) bis 30) ihre Gültigkeit, falls nur darin, unter a_1 die nachträgliche Senkung der beiden Mittelstützen und unter π den Ausdruck 18) verstanden,

$$(1 + \lambda^3)\,p' + \pi \text{ statt } \pi$$

gesetzt wird. Um denselben vortheilhaftesten Spannungszustand wie bei dem gewöhnlichen Aufstellungsverfahren zu erreichen, muss die nachträgliche relative Senkung a_1 die durch die Gleichung

$$\frac{\pi}{p} = \frac{24\,EJ}{pl^4}a_1 = 0{,}4 - 2{,}12\frac{p'}{p} - 0{,}16\left(\frac{p'}{p}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

bestimmte Grösse haben, wonach sich ein negativer Werth von a_1, d. h. eine absolut genommen ebenso grosse nachträgliche Senkung der Aussenstützen als erforderlich herausstellt, wenn $\frac{p'}{p} > \frac{1}{5,4}$ ist. —

3. Der noch übrige Fall **eines auf mehr als 2 Stützen liegenden Brückenträgers von nicht constantem Querschnitt** möge hier nur kurz erwähnt werden. Seine analytische Behandlung würde begreiflicherweise auf noch grössere Schwierigkeiten führen als die Berechnung eines continuirlichen Trägers mit constantem Querschnitt, indem die Biegungsverhältnisse, welche unter allen Umständen von dem Aenderungsgesetz des Querschnitts abhängen, bei veränderlichem Querschnitt also weniger einfach als bei constantem Querschnitt sind, bei einem mehrfach gestützten Träger zugleich mit den Spannungsverhältnissen, auch wenn die Biegungen nur äusserst gering sind, in einer solchen Wechselwirkung stehen, dass die Spannungen nicht ohne die Biegungen berechnet werden können, was bei einem zweifach gestützten Träger nicht der Fall ist. Bei den gleichwohl mehrfach ausgeführten continuirlichen Brückenträgern von veränderlichem Querschnitt pflegte man, soviel bekannt, die Rechnung so auszuführen, als ob der Querschnitt constant wäre, und denselben nachträglich den auf diese Weise berechneten Schubkräften und Spannungsmomenten entsprechend veränderlich zu machen, damit die von diesen Kräften und Momenten abhängigen Spannungen der betreffenden Constructionselemente möglichst überall gleich gross werden möchten, indem man sich nicht darum kümmerte, dass dadurch die Voraussetzungen der Rechnung nachträglich wieder umgestossen, ihre Resultate folglich nicht mehr passend wurden.

Wenn man aber auch die Schwierigkeiten der Rechnung und die kaum vermeidlichen Fehlerquellen bei der Herstellung und Aufstellung glücklich überwunden voraussetzt, so dürften dennoch dergleichen mehrfach gestützte Träger bei veränderlichem Querschnitt um so weniger zu empfehlen sein, als ihre bei constantem Querschnitt wenigstens principiell vorhandenen ökonomischen Vorzüge vor isolirten Trägern ohne Zweifel ganz verschwinden, wenn man in beiden Fällen den Querschnitt der Bedingung gemäss veränderlich macht, dass in einerlei Constructionselementen überall dieselben Maximalspannungen hervorgerufen werden. Dieses Ziel ist das bei gegebenem Constructionssystem behufs möglichster Materialersparniss äusserste, überhaupt principiell erreichbare, in Wirklichkeit aber bei isolirten Trägern durch die Rechnung und praktische Ausführung ungleich leichter und sicherer zu erreichen als bei continuirlichen Trägern.

Wenn man übrigens dergl. Träger nach den sub 2. mitgetheilten Formeln berechnet, so begeht man einen zweifachen Fehler, insofern man nicht nur das Trägheitsmoment J, sondern auch das Eigengewicht p' pro Längeneinheit constant setzt, und es muss bemerkt werden, dass man diesen letzteren Fehler auch dann begeht, wenn man den isolirten Träger nach den Formeln sub 1. berechnet. Allein es ist derselbe jedenfalls und zwar besonders bei isolirten Trägern von viel geringerer Bedeutung schon deswegen, weil das Eigengewicht zum grossen Theil von dem stets gleichförmig vertheilten Gewicht

der Brückenbahn herrührt, und weil ferner eine Ausgleichung des Gewichts pro laufende Längeneinheit des Trägers selbst dadurch herbeigeführt wird, dass wenigstens bei isolirten Trägern immer das Minimum der Schubkraft mit dem Maximum des Spannungsmoments und umgekehrt in demselben Querschnitt zusammenfällt, mithin die von ersterer abhängigen Constructionselemente gerade da am stärksten gehalten werden müssen, wo die von letzterem abhängigen am schwächsten sein dürfen, und umgekehrt.

1. Für den zweifach gestützten Träger lässt sich das oben sub 1. angeführte Gesetz der Bewegung des mittleren Querschnitts aus einer einfachen Betrachtung erkennen: *Fig. 61.*

Wenn die mobile Last von A aus auf die Strecke $AZ = z$ der Brücke sich vorschiebt, so wächst die Belastung der Trägerhälfte AO um $p''z$, die Reaction $= A$ der Stütze A jedoch nur um einen Theil von $p''z$; im Querschnitt O, welcher zuvor mittlerer Querschnitt war, wird also X negativ, und muss folglich der mittlere Querschnitt in der Richtung OA der mobilen Last sich entgegen bewegen. Sobald er aber mit deren Kopf Z bei M zusammengetroffen ist und die mobile Last in der Richtung $MA_{,}$ sich weiter bewegt, bleibt die Belastung der Trägerstrecke $AM = m$ unverändert $= pm$, während A zu wachsen fortfährt; die Schubkraft X im Querschnitt M wird also positiv oder der mittlere Querschnitt bewegt sich in der Richtung MO zurück u. s. f.

Für einen Querschnitt X, der sich in den Abständen x und $x_{,}$ von den Stützpunkten A und $A_{,}$ befindet, lässt sich,

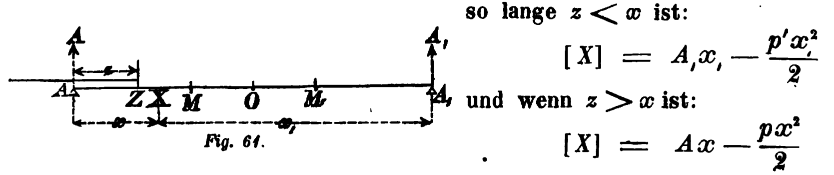


Fig. 61.

so lange $z < x$ ist:

$$[X] = A_{,}x_{,} - \frac{p'x_{,}^2}{2}$$

und wenn $z > x$ ist:

$$[X] = Ax - \frac{px^2}{2}$$

setzen, unter A und $A_{,}$ die Reactionen der gleich bezeichneten Stützpunkte verstanden. Anfänglich wächst also $[X]$ mit $A_{,}$ und später mit A; folglich wächst $[X]$ von $z = 0$ bis $z = l$ beständig, woraus die Gleichungen 4) sich unmittelbar ergeben.

Was die Schubkraft X betrifft, so hat man, wenn vom Eigengewicht des Trägers zunächst abgesehen und die zufällige Last von A aus um die Strecke $AZ = z$ vorgeschoben vorausgesetzt wird,

$$A = p''z \frac{l - \frac{1}{2}z}{l} = p''\left(z - \frac{z^2}{2l}\right)$$

$$A_{,} = p''z \frac{\frac{1}{2}z}{l} = p''\frac{z^2}{2l} .$$

und es ist, wenn $z < x$ ist:

$$X = A - p''z = -p''\frac{z^2}{2l} \quad \text{a)}$$

wenn $z > x$ ist:

$$X = A - p''x = p''\left(z - \frac{z^2}{2l} - x\right) \quad \text{b)}$$

Für $z < x$ ist $\frac{dX}{dz} = -p''\frac{z}{l}$, mithin X im Abnehmen, für $z > x$ ist $\frac{dX}{dz} = p''\left(1 - \frac{z}{l}\right)$, mithin X im Zunehmen begriffen; für $z = x$ ist $X =$ minim. $= -p''\frac{x^2}{2l}$.

Wenn, nachdem die vollständige Belastung eingetreten ist, das hintere Ende der zufälligen Last von A sich wieder entfernt bis zum Abstande $z_, < l$ vom Stützpunkte $A_,$, so erhält man X aus den Gleichungen a) und b) durch Substitution von $x_,$ für x, $z_,$ für z, $-X$ für X, und zwar aus Gleichung b), wenn $z_, > x_,$ ist, dagegen aus Gleichung a), wenn $z_, < x_,$ ist. Mithin ist für $z_, > x_,$:

$$X = p''\left(-z_, + \frac{z_,^2}{2l} + x_,\right); \quad \frac{dX}{-dz_,} = p''\left(1 - \frac{z_,}{l}\right)$$

für $z_, < x_,$:

$$X = p''\frac{z_,^2}{2l}; \quad \frac{dX}{-dz_,} = -p''\frac{z_,}{l};$$

bis $z_, = x_,$ geworden ist, nimmt X zu und erreicht damit das Maximum:

$$p''\frac{x_,^2}{2l} = p''\frac{(l-x)^2}{2l} = p''\left(\frac{l}{2} - x + \frac{x^2}{2l}\right).$$

Wird nun auch auf das Eigengewicht des Trägers Rücksicht genommen, welches für sich allein im Querschnitt X die beständige Schubkraft $p'\left(\frac{l}{2} - x\right)$ hervorbringt, so wird doch bezüglich auf die beiden Belastungszustände, bei denen das Minimum und das Maximum von X stattfindet, Nichts geändert, und man erhält also

$$X_{\text{min.}} = p'\left(\frac{l}{2} - x\right) - p''\frac{x^2}{2l}$$

in dem Augenblicke, wo das Vorderende der zufälligen Last den Querschnitt X erreicht, dagegen

$$X_{\text{max.}} = p'\left(\frac{l}{2} - x\right) + p''\left(\frac{l}{2} - x + \frac{x^2}{2l}\right) = p\left(\frac{l}{2} - x\right) + p''\frac{x^2}{2l}$$

in dem Augenblicke, wo das hintere Ende der zufälligen Last über den Querschnitt X des Trägers hinweggeht. Das Minimum und Maximum ist hierbei algebraisch zu verstehen; wenn aber, wie angenommen, $x < \frac{l}{2}$ ist, so ist ersichtlich, dass stets auch das algebraische Maximum das Maximum des Absolutwerthes von X ist: siehe die obige Gleichung 5). Das zugehörige Spannungsmoment ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
[X] &= Ax - \frac{p'x^2}{2} \\
&= \left(\frac{p'l}{2} + \frac{p''(l-x)^2}{2l}\right)x - \frac{p'x^2}{2} \\
&= p'\frac{x(l-x)}{2} + p''\frac{x(l-x)^2}{2l} \\
&= \left(p' + p''\frac{l-x}{l}\right)\frac{x(l-x)}{2} = \left(p - p''\frac{x}{l}\right)\frac{x(l-x)}{2}.
\end{aligned}$$

Das Minimum von X, also nach Obigem:

$$X_{\text{min.}} = p'\left(\frac{l}{2} - x\right) - p''\frac{x^2}{2l}$$

ist für kleine Werthe von x positiv, für grössere negativ; die den ersteren entsprechenden Querschnitte werden vom mittleren Querschnitt nicht erreicht, während die den letzteren entsprechenden von ihm überschritten werden, oder es liegen erstere in der Strecke AM, letztere in der Strecke OM des Trägers (*Fig. 61*). $AM = m$ ist also dasjenige x, für welches $X_{\text{min.}} = 0$ ist, oder es ist:

$$p'\left(\frac{l}{2} - m\right) - p''\frac{m^2}{2l} = 0,$$

welche Gleichung sich schreiben lässt:

$$\frac{m^2}{l^2} + 2\frac{p'}{p''}\frac{m}{l} = \frac{p'}{p''}$$

und, nach $\frac{m}{l}$ aufgelöst, den Ausdruck 3) liefert.

Die Näherungsformel 6) ergiebt sich aus der Betrachtung, dass die Schubkraft eines Querschnitts $X =$ der ganzen Last des Trägers von X bis zum benachbarten mittleren Querschnitt ist, und dass, wenn das hintere Ende der in der Richtung $AA_{,}$ fortschreitenden zufälligen Last die Trägermitte O erreicht hat, in dieser also die grösstmögliche Schubkraft stattfindet, der mittlere Querschnitt auf dem Wege $OM_{,}$ schon fast bei $M_{,}$ angekommen sein wird. Man wird also das grösste X in O nur wenig zu gross setzen, indem man es der Gesammtlast der Trägerstrecke $OM_{,}$ gleich, d. h. $= p\mu$ setzt, und indem man dann von O bis A oder $A_{,}$ ein dem Abstand $OX = \xi$ einfach proportionales Wachsen der grössten Schubkraft voraussetzt, erhält man mit Rücksicht darauf, dass dieselbe bei A und $A_{,}$ genau $= \frac{pl}{2}$ ist:

$$X = p\mu + \frac{\xi}{\frac{1}{2}l}\left(\frac{pl}{2} - p\mu\right) = p\left[\mu + \xi\left(1 - \frac{2\mu}{l}\right)\right].$$

Dass dieser angenäherte Werth von X stets grösser ist als der genaue Werth nach Gleichung 5), erkennt man daraus, dass die 2. Ableitung des letzteren $= \frac{p''}{l}$ positiv ist, dass also X von A bis O abnehmend abnimmt, d. h. die Curve, deren Abscissen $= x$ und deren Ordinaten $=$ den zugehörigen Werthen von X nach Gleichung 5) sind, gegen die Axe der x zu convex ist. Schon wenn man diese Curve durch ihre Sehne zwischen den den Abscissen $x = 0$ und $x = \frac{l}{2}$ entsprechenden Punkten ersetzte, würde man für alle mittleren Stellen zwischen A und O zu grosse Ordinaten, also zu grosse Werthe von X erhalten; um so mehr muss dieses der Fall sein, wenn die Sehne durch eine gerade Linie ersetzt wird, welche einerseits durch den Endpunkt der Curve bei A, andererseits aber bei O durch den Endpunkt einer Ordinate geht, die grösser ist als die entsprechende Ordinate der Curve.

Uebrigens ist der Unterschied zwischen den nach Gleichung 6) und nach Gleichung 5) berechneten Werthen von X:

$$\Delta = p\mu\left(1 - \frac{2\xi}{l}\right) - p''\frac{x^2}{2l} = p\,\frac{2\mu x}{l} - p''\frac{x^2}{2l}\,.$$

Derselbe ist am grössten und zwar

$$\Delta_{\text{max.}} = \left(\frac{2\mu}{l}\right)^2 \cdot \frac{p}{p''} \cdot \frac{pl}{2} \quad \text{für} \quad \frac{x}{l} = \frac{2\mu}{l} \cdot \frac{p}{p''} \quad \ldots\ldots \text{c).}$$

Z. B. für $\frac{p'}{p''} =$	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2
ist $\frac{p}{p''} =$	$^5/_4$	$^3/_2$	2	3
$\frac{2\mu}{l} = 1 - \frac{2m}{l} =$	0,382	0,268	0,172	0,102
$\frac{x}{l} =$	0,478	0,402	0,344	0,306
$\Delta_{\text{max.}} =$	0,182	0,108	0,059	0,031 $\times \frac{pl}{2}$.

Der Fehler bei Anwendung von Gleichung 6) ist hiernach um so kleiner, je grösser $\frac{p'}{p''}$ oder je grösser unter sonst gleichen Umständen die Spannweite der Brücke ist. —

2. Der mehrfach gestützte Träger mit constantem Querschnitt.

Zur Ableitung der Fundamentalgleichung 7) werde zuvörderst die in §. 14 behandelte Aufgabe, betreffend einen **beiderseits befestigten** Balken, insofern verallgemeinert, als die elastische Linie mit ihren Endpunkten A und $A_{,}$ (*Fig. 62*) in etwas, übrigens beliebig verschiedenen Höhen (in den Abständen a und $a_{,}$ unter der Horizontalen OX) liegend, und daselbst unter beliebigen, jedoch sehr kleinen Winkeln α und $\alpha_{,}$ gegen die Horizontale OX geneigt vorausgesetzt wird; es ist klar, dass die Resultate dieser Aufgabe bei Voraussetzung gleichförmiger Belastung $= p$ pro Längeneinheit alle Gesetze eines mehrfach gestützten und in jeder **einzelnen** Abtheilung gleichförmig belasteten Trägers in sich schliessen müssen, indem jede Abtheilung eines solchen zwischen 2 Stützpunkten unmittelbar jenem beiderseits in beliebigen Höhen und beliebigen Richtungen befestigten Balken vergleichbar ist.

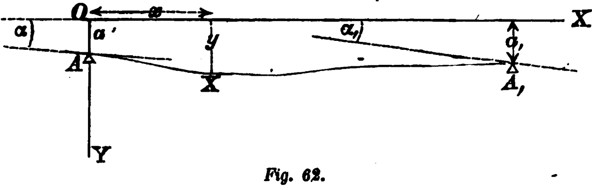


Fig. 62.

Mit Rücksicht auf die im Vorhergehenden erklärten Bezeichnungen und auf den aus §. 8 schon bekannten angenäherten analytischen Ausdruck des Spannungsmoments $[X]$, sowie endlich bei der aus *Fig. 62* ersichtlichen Lage der Axen, worauf die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes der elastischen Linie bezogen werden, hat man:

$$\left.\begin{aligned} X &= A - px \\ [X] &= -EJ\frac{d^2y}{dx^2} = [A] + Ax - \frac{px^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{d).}$$

Die zweimalige Integration der letzten Gleichung giebt, sofern ohne in Betracht kommenden Fehler α für tg α gesetzt werden darf:

$$\left.\begin{aligned} EJ\left(-\frac{dy}{dx}+\alpha\right) &= [A]x+\frac{Ax^2}{2}-\frac{px^3}{6} \\ EJ(-y+a+\alpha x) &= \frac{[A]x^2}{2}+\frac{Ax^3}{6}-\frac{px^4}{24} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{e).}$$

Für $x=l$ ist $X=-A_,$; $[X]=[A_,]$; $\frac{dy}{dx}=\alpha_,$; $y=a_,$, und wenn man diese Werthe in den Gleichungen d) und e) substituirt, so erhält man folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -A_, &= A-pl \\ [A_,] &= [A]+Al-\frac{pl^2}{2} \\ EJ(-\alpha_,+\alpha) &= [A]l+\frac{Al^2}{2}-\frac{pl^3}{6} \\ EJ(-\varDelta a+\alpha l) &= \frac{[A]l^2}{2}+\frac{Al^3}{6}-\frac{pl^4}{24} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{f),}$$

woraus sich 4 der in ihnen vorkommenden Buchstabengrössen vermittelst der gegebenen übrigen, insbesondere

$$A \quad A_, \quad [A] \quad [A_,]$$

berechnen lassen, wenn

$$E \quad J \quad l \quad p \quad \alpha \quad \alpha_, \quad \varDelta a$$

gegeben sind, wonach man schliesslich für jeden Querschnitt die Werthe von X und $[X]$, sowie für jeden Punkt der elastischen Linie die deren Gestalt bestimmenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und y findet, indem man die berechneten Werthe von A und $[A]$ in den Gleichungen d) und e) substituirt. —

Für den vorliegenden Zweck der Anwendung auf einen mehrfach gestützten Träger ist die Relation bemerkenswerth, welche sich ergiebt, wenn der aus der zweiten der Gleichungen f) entnommene Werth

$$A=\frac{[A_,]-[A]}{l}+\frac{pl}{2}=\frac{\varDelta[A]}{l}+\frac{pl}{2} \quad \ldots\ldots \text{g)}$$

in der vierten jener Gleichungen substituirt wird; dadurch entsteht:

$$EJ(-\varDelta a+\alpha l)=\frac{2[A]+[A_,]}{6}\cdot l^2+\frac{pl^4}{24} \quad \ldots\ldots \text{h).}$$

Sind nun A, A_1, A_2 drei benachbarte Stützpunkte eines continuirlichen Trägers, so erhält man zunächst aus Gleichung h) durch unmittelbare Uebertragung auf die nächstfolgende Abtheilung, d. h. durch Vertauschung

$$\begin{aligned} &\text{von} \quad p \quad l \quad \alpha \quad \varDelta a \quad [A] \quad [A_1] \\ &\text{mit} \quad p_, \quad l_, \quad \alpha_, \quad \varDelta a_, \quad [A_1] \quad [A_2] \end{aligned}$$

$$EJ(-\varDelta a_,+\alpha_, l_,)=\frac{2[A_1]+[A_2]}{6}l^2+\frac{p_,l_,^4}{24};$$

während die Gleichung b), da die Endpunkte A und $A_{,}$ der Abtheilung $AA_{,}$ durch Nichts vor einander ausgezeichnet sind, offenbar richtig bleiben muss, wenn a mit $-\alpha_{,}$; a mit $a_{,}$; $[A]$ mit $[A_{,}]$ vertauscht und so erhalten wird:

$$EJ(\varDelta a - \alpha_{,} l) = \frac{[A] + 2[A_{,}]}{6} l^2 + \frac{p l^4}{24}.$$

Wenn man endlich $\alpha_{,}$ zwischen diesen beiden letzten Gleichungen eliminirt, so erhält man:

$$EJ\left(\frac{\varDelta a}{l} - \frac{\varDelta a_{,}}{l_{,}}\right) = \frac{[A]l + 2[A_1](l + l_{,}) + [A_2]l_{,}}{6} + \frac{p l^3 + p_{,} l_{,}^3}{24}$$

d. i. die Gleichung 7).

Die Substitution des Ausdrucks g) von A in den Gleichungen d) giebt:

$$X = \frac{\varDelta[A]}{l} + p\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$[X] = [A] + \left(\frac{\varDelta[A]}{l} + \frac{pl}{2}\right)x - \frac{px^2}{2}.$$

Aus dem Ausdruck von X ergiebt sich entsprechend $X = 0$:

$$x = m = \frac{\varDelta[A]}{pl} + \frac{l}{2}$$

und hiermit: $X = p(m - x)$

$$[X] = [A] + pmx - \frac{px^2}{2} = [A] + p\frac{x(2m - x)}{2};$$

insbesondere:

$$[M] = [A] + p\frac{m(2m - m)}{2} = [A] + \frac{pm^2}{2}.$$

Hierdurch sind die Ausdrücke 8) und 10) gerechtfertigt; den Ausdruck 9) von h findet man durch Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$0 = [A] + p\frac{n(2m - n)}{2}.$$

Was schliesslich den Stützendruck betrifft, so darf das A der Gleichung g) mit dem Druck auf den gleichbezeichneten Stützpunkt nicht verwechselt werden, indem es vielmehr nur ein Theil dieses Drucks und zwar derjenige Theil ist, welcher von der Belastung der Abtheilung $AA_{,}$ herrührt. In der That ist der Druck, den irgend ein Stützpunkt auszuhalten hat, der gesammten Belastung derjenigen Trägerstrecke gleich, welche zwischen den diesem Stützpunkt auf entgegengesetzten Seiten benachbarten mittleren Querschnitten enthalten ist. Sind also M und $M_{,}$ die mittleren Querschnitte der Abtheilungen $AA_{,} = l$ und $A_1 A_2 = l_{,}$; $AM = m$ und $A_{,}M_{,} = m_{,}$; so ist der Druck auf den diese Abtheilungen trennenden Stützpunkt:

$$\begin{aligned} A_{,} &= p(l - m) + p_{,} m_{,} \\ &= p\left(\frac{l}{2} - \frac{\varDelta[A]}{pl}\right) + p_{,}\left(\frac{l_{,}}{2} + \frac{\varDelta[A_{,}]}{p_{,} l_{,}}\right) \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 11). —

a. Zur Ableitung der für den **dreifach gestützten Träger** angeführten Formeln mögen zunächst die Belastungen incl. Eigengewicht pr. Längeneinheit der beiden gleichen Abtheilungen $AA_{,}$ und $A_1 A_2$ in beliebiger Weise verschieden $= p_1$ und p_2 gesetzt werden. Wegen

$$a = a_2 = 0; \quad [A] = [A_2] = 0$$

ist dann:

$$\frac{\Delta a}{l} = \frac{a_1}{l}; \quad \frac{\Delta a_1}{l_{,}} = -\frac{a_1}{l}; \quad \Delta \frac{\Delta a}{l} = -2\frac{a_1}{l}$$

ebenso:

$$\Delta \frac{\Delta [A]}{l} = -2\frac{[A_1]}{l};$$

also nach Gleichung 7):

$$-[A_1] = (p_1 + p_2)\frac{l^2}{16} - \frac{3EJ}{l^2}a_1 = (p_1 + p_2 - \pi)\frac{l^2}{16} \quad . \; . \; . \; . \; \text{i}),$$

falls mit π der in Gleichung 2) angegebene Ausdruck bezeichnet wird. Nach Gleichung 8) ist ferner

$$m = \frac{l}{2} + \frac{[A_1]}{p_1 l} = \frac{7p_1 - p_2 + \pi}{p_1}\,\frac{l}{16}; \quad [M] = \frac{p_1 m^2}{2} = \frac{(7p_1 - p_2 + \pi)^2}{p_1}\,\frac{l^2}{512} \quad . \; . \; . \; \text{k})$$

und nach Gleichung 9): $n = 2m$. Endlich ist:

$$\left.\begin{aligned} &A = p_1 m = (7p_1 - p_2 + \pi)\frac{l}{16}; \; -A_1' = p_1(l-m) = (9p_1 + p_2 - \pi)\frac{l}{16} \\ &\text{und nach Gleichung 11):} \\ &\qquad A_{1''} = (5p_1 + 5p_2 - \pi)\frac{l}{8} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; \text{l}).$$

Aus diesen Ausdrücken ist sofort ersichtlich, dass der Pfeilerdruck

$$A \text{ am kleinsten ist } = (7p' - p + \pi)\frac{l}{16} \quad \text{für} \quad p_1 = p' \quad \text{und} \quad p_2 = p;$$

$$A_1 \;\; \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \; = (10p' - \pi)\frac{l}{8} \qquad \text{„} \quad p_1 = p_2 = p';$$

als Bedingung dafür, dass beide stets positiv bleiben, erhält man also, wie oben sub 13) angegeben:

$$p - 7p' < \pi < 10p'.$$

Ebenso erkennt man sofort, dass die Maximalwerthe

$$\text{von} \quad -[A_1]; \; -A_1' \quad \text{und} \quad A_1 \text{ für } p_1 = p_2 = p;$$
$$\text{von} \quad A \text{ für } p_1 = p \quad \text{und } p_2 = p'$$

erreicht werden, mithin die sub 14) und 15) dafür angegebenen Ausdrücke haben.

Der Maximalwerth des Spannungsmoments

$$[M] = \frac{(7p_1 - p_2 + \pi)^2}{p_1}\,\frac{l^2}{512} = \left(7 - \frac{p_2 - \pi}{p_1}\right)^2 \frac{p_1 l^2}{512}$$

erfordert aber eine nähere Betrachtung. Ohne Weiteres ist nur ersichtlich, dass $p_2 = p'$ sein muss, so dass es sich nur noch darum handelt, den Werth von p_1 zu bestimmen, durch welchen der Ausdruck

$$\left(7-\frac{p'-\pi}{p_1}\right)^2 \cdot p_1$$

am grössten wird. Ist $\pi < p'$, so sind beide Factoren, mithin das Product um so grösser, je grösser p_1, am grössten also, wenn $p_1 = p$ ist. Ist aber $\pi > p'$, so verhält es sich mit dem ersten Factor umgekehrt, und muss man zur Bestimmung des Maximums von

$$\left(7+\frac{\pi-p'}{p_1}\right)^2 \cdot p_1 = 49p_1 + 14(\pi-p') + \frac{(\pi-p')^2}{p_1}$$

die Ableitung

$$49 - \frac{(\pi-p')^2}{p_1^2} = 0$$

setzen, woraus $p_1 = \frac{\pi-p'}{7}$ erhalten wird. Indem aber durch dieses p_1 die zweite Ableitung

$$2\frac{(\pi-p')^2}{p_1^3} = \frac{98}{p_1}$$

positiv wird, so entspricht ihm thatsächlich ein Minimum des Spannungsmoments $[M]$, welches also nur dann auch im vorliegenden Falle stets für $p_1 = p$ am grössten sein wird, wenn das obige

$$p_1 = \frac{\pi-p'}{7} < p' \quad \text{d. h.} \quad \pi < 8p'$$

ist, eine Bedingung, welche die frühere Annahme: $\pi < p'$ in sich schliesst und den sub 14) angegebenen Ausdruck für den Maximalwerth von $[M]$ ergiebt.

Wäre $\pi > 8p'$, so würde der Maximalwerth von $[M]$ für $p_1 = p'$, also im unbelasteten Zustande des Trägers stattfinden, und zwar

$$[M] = \left(6+\frac{\pi}{p'}\right)^2 \frac{p'l^2}{512} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14\text{a})$$

werden, wenn das obige

$$p_1 = \frac{\pi-p'}{7} > p \quad \text{d. h.} \quad \pi > 7p + p'$$

wäre, was übrigens wegen der Bedingung 13): $\pi < 10p'$ nur dann möglich wäre, wenn $\frac{p'}{p} > \frac{7}{9}$ ist.

Wäre aber endlich

$$8p' < \pi < 7p + p'$$

so müssten die Werthe sub 14) und 14a) von $[M]$ mit einander verglichen werden, um den grösseren von beiden zu erkennen. Wäre z. B. $\pi = 10p' =$ dem nach 13) höchstens zulässigen Grenzwerth, so könnte noch immer der Maximalwerth von $[M]$ durch den Ausdruck sub 14) dargestellt werden, wenn

$$10p' < 7p + p' \quad \text{d. h.} \quad \frac{p'}{p} < \frac{7}{9}$$

wäre; in der That würde er es aber, wie die Vergleichung der beiden Ausdrücke von $[M]$ lehrt, nur für

$$\frac{p'}{p} < \left(\frac{7}{9}\right)^2$$

Was endlich noch die früher angeführten kleinsten und grössten Werthe m' und m'' von

$$m = \left(7 - \frac{p_2 - \pi}{p_1}\right)\frac{l}{16}$$

betrifft, so sieht man sogleich, dass, damit m möglichst klein werde, $p_2 = p$ und sonach $\frac{p - \pi}{p_1}$ möglichst gross sein müsse; letzteres ist der Fall für $p_1 = p'$, wenn $\pi < p$, dagegen für $p_1 = p$, wenn $\pi > p$ ist. Desgleichen muss, damit m möglichst gross werde, $p_2 = p'$ und sonach $\frac{p' - \pi}{p_1}$ möglichst klein sein; letzteres ist der Fall für $p_1 = p$, wenn $\pi < p'$, dagegen für $p_1 = p'$, wenn $\pi > p'$ ist. —

Liegen die 3 Stützpunkte in gleicher Höhe, so hat man $a_1 = 0$, also $\pi = 0 < 8p'$. Das Verhältniss der beiden relativ grössten Spannungsmomente ist dann nach Gleichung 14):

$$\frac{[M]}{-[A_1]} = \frac{\left(7 - \frac{p'}{p}\right)^2}{64} \left\{\begin{array}{l} < \frac{36}{49} = 0{,}735 \\ > \frac{9}{16} = 0{,}562 \end{array}\right\} \quad \text{wegen} \quad \frac{1}{7} < \frac{p'}{p} < 1.$$

Sonach ist $-[A_1] = [\Xi]$; desgleichen ersieht man aus Gleichung 15) sofort, dass von den beiden relativ grössten Schubkräften A und $-A_1'$ die letztere die absolut grösste $= \Xi$ ist. —

Die Berechnung der vortheilhaftesten Senkung der Mittelstütze ist oben genügend erklärt worden. Aus der Formel 17a) ergiebt sich in Verbindung mit der allgemeinen Bedingung 13) für das dauernde zwanglose Aufliegen des Trägers auf allen Stützen, dass

$$1 - 7\frac{p'}{p} < 0{,}325 + 0{,}305\frac{p'}{p}$$

also

$$\frac{p'}{p} > \frac{0{,}675}{7{,}305} = \frac{1}{10{,}8}$$

sein muss. Aus $p < 10{,}8p'$ ergiebt sich dann weiter:

$$\pi = 0{,}325\,p + 0{,}305\,p' < (0{,}325 \cdot 10{,}8 + 0{,}305)\,p' = 3{,}815\,p'$$

als nachträgliche Rechtfertigung der Voraussetzung: $\pi < 8p'$, worauf die ganze Rechnung beruht. —

b. Auch zur Ableitung der für den vierfach gestützten Träger angeführten Formeln mögen zunächst wieder die Belastungen incl. Eigengewicht pr. Längeneinheit der 3 Abtheilungen $AA_1 = l$, $A_1A_2 = l_1$ und $A_2A_3 = l$ in beliebiger Weise verschieden $= p_1, p_2, p_3$ gesetzt werden.

Den Bedingungen der Aufgabe gemäss ist:

$$a = a_3 = 0; \quad a_1 = a_2; \quad [A] = [A_3] = 0;$$

also

$$\frac{\Delta a}{l} = \frac{a_1}{l}; \quad \frac{\Delta a_1}{l_1} = 0; \quad \frac{\Delta a_2}{l_2} = -\frac{a_1}{l}$$

$$\Delta\frac{\Delta a}{l} = \Delta\frac{\Delta a_1}{l_1} = -\frac{a_1}{l}.$$

Nach Gleichung 7) ist demnach:

$$-2[A_1](l+l_1)-[A_2]l_1 = \frac{p_1 l^3 + p_2 l_1^3}{4} - \frac{6EJ}{l}a_1$$

$$-[A_1]l_1 - 2[A_2](l_1+l) = \frac{p_2 l_1^3 + p_3 l^3}{4} - \frac{6EJ}{l}a_1'$$

oder mit Rücksicht auf 18):

$$-2(1+\lambda)[A_1] - \lambda[A_2] = (p_1 + \lambda^3 p_2 - \pi)\frac{l^2}{4}$$

$$-\lambda[A_1] - 2(1+\lambda)[A_2] = (\lambda^3 p_2 + p_3 - \pi)\frac{l^2}{4}$$

und hieraus folgt:

$$-[A_1] = \frac{2(1+\lambda)p_1 + (2+\lambda)\lambda^3 p_2 - \lambda p_3 - (2+\lambda)\pi}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\frac{l^2}{4} \quad \ldots \text{m)}$$

$$-[A_2] = \frac{2(1+\lambda)p_3 + (2+\lambda)\lambda^3 p_2 - \lambda p_1 - (2+\lambda)\pi}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\frac{l^2}{4}$$

$$[A_2] - [A_1] = \frac{p_1 - p_3}{2+\lambda}\,\frac{l^2}{4}.$$

Nach Gleichung 8) ist nun:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{l}{2} + \frac{[A_1]}{p_1 l} = \frac{2(3+7\lambda+3\lambda^2)p_1 - (2+\lambda)\lambda^3 p_2 + \lambda p_3 + (2+\lambda)\pi}{(2+\lambda)(2+3\lambda)p_1}\frac{l}{4} \\ l - m &= \frac{2(5+9\lambda+3\lambda^2)p_1 + (2+\lambda)\lambda^3 p_2 - \lambda p_3 - (2+\lambda)\pi}{(2+\lambda)(2+3\lambda)p_1}\frac{l}{4} \\ m_1 &= \frac{l_1}{2} + \frac{[A_2]-[A_1]}{p_2 l_1} = \left(2\lambda + \frac{p_1 - p_3}{(2+\lambda)\lambda p_2}\cdot\frac{l}{4}\right. \end{aligned}\right\} \ldots \text{n)}$$

$$[M] = \frac{p_1 m^2}{2}; \quad [M_1] = [A_1] + \frac{p_2 m_1^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{o)}.$$

Endlich ist:

$$A = p_1 m; \quad -A_1' = p_1(l-m); \quad A_1'' = p_2 m_1; \quad A_1 = -A_1' + A_1'' \ldots \text{p)}.$$

Zunächst erkennt man, dass A am kleinsten ist bei Belastung der Mittelöffnung allein (p_1 und $p_3 = p^1$; $p_2 = p$), dass dagegen $-A_1'$ und A_1'', mithin auch A_1 am kleinsten ist bei Belastung der dritten Oeffnung allein (p_1 und $p_2 = p'$; $p_3 = p$); die Forderung, dass diese kleinsten Werthe von A und A_1 noch positiv sein müssen, führt zu der Bedingung 19).

Der Werth von $-[A_1]$ wird am grössten, wenn p_1 und p_2 möglichst gross $= p$, p_3 möglichst klein $= p'$ ist; die Einsetzung dieser Werthe liefert den Ausdruck 20).

Damit

$$[M] = \left[\frac{2(3+7\lambda+3\lambda^2) - \dfrac{(2+\lambda)\lambda^3 p_2 - \lambda p_3 - (2+\lambda)\pi}{p_1}}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\right]^2 \frac{p_1 l^2}{32}$$

ein Maximum sei, muss jedenfalls $p_2 = p'$ und $p_3 = p$ sein.

Ist ferner

$$(2+\lambda)\lambda^3 p' - \lambda p - (2+\lambda)\pi > 0$$

oder

$$\pi < \lambda^3 p' - \frac{\lambda}{2+\lambda} p,$$

so muss auch jedenfalls $p_1 = p$ sein. Ist aber π grösser, so ist, wenn zur Abkürzung die positiven Werthe

$$2(3+7\lambda+3\lambda^2) = B; \quad -(2+\lambda)\lambda^3 p' + \lambda p + (2+\lambda)\pi = C$$

gesetzt werden, das dem Maximum von

$$\left(B + \frac{C}{p_1}\right)^2 \cdot p_1 = B^2 p_1 + 2BC + \frac{C^2}{p_1}$$

entsprechende p_1 nur durch Gleichsetzung der Ableitung mit Null zu erkennen, wodurch

$$B^2 - \frac{C^2}{p_1^2} = 0; \quad p_1 = \frac{C}{B}$$

erhalten wird, welchem p_1 indessen, da die zweite Ableitung positiv ist, thatsächlich nicht ein Maximum, sondern ein Minimum von $[M]$ entspricht. Daraus folgt, dass auch im vorliegenden Falle noch $p_1 = p$ stets das Maximum von $[M]$ liefert, wenn $p_1 = \frac{C}{B} < p'$ ist, eine Bedingung, welche auf die Form der Ungleichung 22) gebracht werden kann und die obige engere Bedingung

$$\pi < \lambda^3 p' - \frac{\lambda}{2+\lambda} p$$

in sich schliesst. Die Einsetzung der Werthe p_1 und $p_3 = p$, $p_2 = p'$ in den allgemeinen Ausdruck von $[M]$ liefert die Gleichung 21).

Wäre dagegen $p_1 = \frac{C}{B} > p$, d. h.

$$\pi > \frac{6+13\lambda+6\lambda^2}{2+\lambda} p + \lambda^3 p' \quad \ldots\ldots \quad 22a),$$

so würde das Maximum des Spannungsmoments $[M]$ bei Belastung der dritten Oeffnung allein (p_1 und $p_2 = p'$; $p_3 = p$) eintreten und den Ausdruck haben:

$$[M] = \left(\frac{6+14\lambda+6\lambda^2-2\lambda^3-\lambda^4+\frac{\lambda p+(2+\lambda)\pi}{p'}}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\right)^2 \cdot \frac{p' l^2}{32} \quad \ldots \quad 21a).$$

Läge endlich π zwischen den durch 22) und 22a) bestimmten Grenzen, so müssten die beiden Werthe 21) und 21a) mit einander verglichen werden, um den grösseren zu erkennen, welcher dann zugleich das absolut grösste $[M]$ ist.

Aus dem allgemeinen Ausdruck des Spannungsmoments der Mittelöffnung, nämlich nach o) mit Rücksicht auf m) und n):

$$[M_1] = \frac{-2(1+\lambda)p_1 - (2+\lambda)\lambda^3 p_2 + \lambda p_3 + (2+\lambda)\pi}{(2+\lambda)(2+3\lambda)}\,\frac{l^2}{4} +$$
$$+ \left(2\lambda + \frac{p_1 - p_3}{(2+\lambda)\lambda p_2}\right)\frac{p_2 l^2}{32}$$

lässt sich ohne Weiteres von keiner der 3 Grössen p_1 p_2 p_3 erkennen, dass sie möglichst gross oder möglichst klein sein muss, um $[M_1]$ möglichst gross zu machen. Wird aber zunächst eine symmetrische Belastung, d. h. $p_1 = p_3$ vorausgesetzt (die 4 Fälle damit umfassend, dass der ganze Träger unbelastet oder belastet, oder dass nur die Mittelöffnung unbelastet oder belastet ist), so erhält man nach einiger Reduction:

$$[M_1] = \frac{(2+\lambda)\lambda^2 p_2 - 2p_1 + 2\pi}{2+3\lambda}\cdot\frac{l^2}{8},$$

woraus man sofort erkennt, dass der grösste Werth von $[M_1]$ für $p_1 = p'$ und $p_2 = p$, d. h. bei Belastung der Mittelöffnung allein stattfindet, und zwar:

$$[M_1] = \frac{(2+\lambda)\lambda^2 - 2\dfrac{p'-\pi}{p}}{2+3\lambda}\,\frac{p\,l^2}{8}$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 23). Dagegen könnte bei unsymmetrischer Belastung $[M_1]$ noch grösser werden. Es macht dabei der symmetrischen Anordnung der Stützen wegen keinen Unterschied, ob die erste oder die dritte Oeffnung als belastet und entsprechend die dritte oder die erste als unbelastet vorausgesetzt wird; vielmehr kommt es nur darauf an, wenn $p_1 = p$ und $p_3 = p'$ gesetzt wird, das dem relativ grössten $[M_1]$ entsprechende p_2 zu bestimmen und dieses relative Maximum von $[M_1]$ dann schliesslich mit demjenigen zu vergleichen, welches soeben für symmetrische Belastung gefunden wurde. Was die erstere Frage betrifft, so muss in dem allgemeinen Ausdruck von $[M_1]$ nach Substitution von $p_1 = p$ und $p_3 = p'$ nur die Summe derjenigen Glieder ein Maximum werden, welche p_2 enthalten, also nach Absonderung des gemeinschaftlichen Factors $\frac{l^2}{4}$:

$$-\frac{\lambda^3 p_2}{2+3\lambda} + \left(2\lambda + \frac{p-p'}{(2+\lambda)\lambda p_2}\right)^2 \frac{p_2}{8}$$

oder noch einfacher nach abermaliger Absonderung eines Gliedes ohne p_2 und Zusammenziehung der Glieder mit p_2:

$$\frac{4(2+\lambda)^3\lambda^4}{2+3\lambda}\cdot p_2 + \frac{(p-p')^2}{p_2},$$

ein Ausdruck, welcher unendlich gross wird sowohl für $p_2 = 0$ als für $p_2 = \infty$ und dazwischen nur einen Minimalwerth hat; zwischen den Grenzen p' und p von p_2 wird er folglich entweder mit dem einen oder mit dem anderen Grenzwerth am grössten. Als Bedingung dafür, dass er für $p_2 = p$ am grössten wird, dass also, wenn zur Abkürzung

$$\frac{2(2+\lambda)^3\lambda^4}{2+3\lambda} = F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{F)}$$

gesetzt wird,

$$2Fp + \frac{(p-p')^2}{p} > 2Fp' + \frac{(p-p')^2}{p'}$$

ist, erhält man:

$$2F > (p - p')\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)$$

$$2Fpp' > p^2 - 2pp' + p'^2$$

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - 2(1 + F)\frac{p'}{p} + 1 < 0.$$

Hiernach muss $\frac{p'}{p}$ grösser als die kleinere und kleiner als die grössere Wurzel der quadratischen Gleichung sein, welche durch Vertauschung des Zeichens $<$ mit $=$ erhalten wird. Das Letztere ist immer der Fall; damit aber auch $\frac{p'}{p}$ grösser als die kleinere Wurzel sei, muss

$$\frac{p'}{p} > 1 + F - \sqrt{(1 + F)^2 - 1}$$

oder

$$\frac{p'}{p} > \frac{1}{1 + F + \sqrt{(1 + F)^2 - 1}} \qquad \text{q)}$$

sein. Man erhält z. B. für

$$\lambda = 0{,}7 \qquad 0{,}8 \qquad 0{,}9 \qquad 1$$

$$\frac{p'}{p} > \frac{1}{6{,}5} \qquad \frac{1}{10{,}1} \qquad \frac{1}{15{,}6} \qquad \frac{1}{23{,}6}.$$

Wenn λ noch grösser wird, so nimmt der Grenzwerth q) schnell ab, und erkennt man sonach durch Vergleichung mit der Bedingung 19), dass, wenn diese erfüllt ist, umsomehr auch q) erfüllt sein, d. h. das der unsymmetrischen Belastung entsprechende relativ grösste $[M_1]$ bei Belastung der Mittel- nebst einer Seitenöffnung stattfinden wird, so lange λ nicht $< 0{,}8$ ist.

Schliesslich bleibt dieses

relativ grösste $[M_1]$ bei $p_1 = p$; $p_2 = p$; $p_3 = p'$

mit dem

relativ grössten $[M_1]$ bei $p_1 = p'$; $p_2 = p$; $p_3 = p'$

zu vergleichen. Diese Vergleichung kann natürlich auf diejenigen Glieder des allgemeinen Ausdrucks von $[M_1]$ — nach Substitution von $p_2 = p$; $p_3 = p'$ — beschränkt werden, welche p_1 enthalten; sie lassen sich durch Zusammenziehung und Weglassung gemeinschaftlicher Factoren auf die Form bringen:

$$-2\left(\frac{2(2 + \lambda)^2\lambda^2}{2 + 3\lambda} + \frac{p'}{p}\right)\frac{p_1}{p} + \left(\frac{p_1}{p}\right)^2.$$

Als Bedingung dafür, dass dieser Ausdruck für $p_1 = p'$ grösser sei als für $p_1 = p$, dass also, $\lambda \gtreqless 0{,}8$ vorausgesetzt, das absolut grösste $[M_1]$ durch die Gleichung 23) gegeben werde, hat man, wenn

$$\frac{2(2 + \lambda)^2\lambda^2}{2 + 3\lambda} = G$$

gesetzt wird:

$$-2\left(G+\frac{p'}{p}\right)\frac{p'}{p}+\left(\frac{p'}{p}\right)^2 > -2\left(G+\frac{p'}{p}\right)+1$$

und daraus:

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^2+2(G-1)\frac{p'}{p}-2G+1 < 0;$$

mithin $\frac{p'}{p}$ grösser als die kleinere Wurzel ($=1-2G$) und kleiner als die grössere Wurzel ($=1$) der durch Vertauschung des Zeichens $<$ mit dem Zeichen $=$ erhaltenen Gleichung. Sofern immer $\frac{p'}{p}<1$ ist, braucht nur noch

$$\frac{p'}{p} > 1-\frac{4(2+\lambda)^2\lambda^2}{2+3\lambda}$$

zu sein, eine Bedingung, welche in der obigen q) enthalten ist, indem sie ein beliebig kleines Verhältniss $\frac{p'}{p}$ gestattet, wenn auch nur $\lambda > 0{,}4$ ist.

In dem Ausdruck von m lässt sich der Coefficient von $\frac{l}{4}$ in eine Summe verwandeln, deren erstes Glied eine Function von λ, also von dem Belastungszustande unabhängig, und deren zweites Glied (ohne den positiven Coefficienten von p_1 im Nenner):

$$\frac{-(2+\lambda)\lambda^3 p_2+\lambda p_3+(2+\lambda)\pi}{p_1}$$

zugleich mit m ein Minimum und Maximum wird. Wenn m möglichst klein $=m'$ sein soll, muss also jedenfalls p_2 möglichst gross $=p$ und p_3 möglichst klein $=p'$ sein, wodurch der Zähler des obigen Quotienten

$$=-(2+\lambda)\lambda^3 p+\lambda p'+(2+\lambda)\pi$$

negativ oder positiv werden kann, je nachdem die Ungleichung 26) mit dem oberen oder unteren Zeichen genommen stattfindet; im ersten Falle muss der fragliche Quotient, um möglichst klein zu sein, absolut genommen möglichst gross, also der Nenner $=p'$, im anderen Falle muss der Nenner $=p$ sein: d. h. im ersten Falle muss blos die zweite, im anderen die erste und zweite Oeffnung belastet sein. Daraus ergeben sich die beiden Ausdrücke 27) von m' mittelst des allgemeinen Ausdrucks n) von m. — Auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit der beiden Werthe 29) von m'' und der Bedingung 28) für die Gültigkeit des einen oder anderen dieser beiden Werthe.

Der Abstand m_1 des mittleren Querschnitts der Mittelöffnung von der Stütze A_1 ist der betreffenden Gleichung n) zufolge ein Minimum oder Maximum, wenn $\frac{p_1-p_3}{p_2}$ ein Minimum oder Maximum ist, wenn also im ersten Falle $p_1-p_3=p'-p$ $=-(p-p')$, im anderen dagegen $=p-p'$ ist. Indem dadurch der Quotient $\frac{p_1-p_3}{p_2}$ im ersten Falle negativ, im zweiten positiv wird, ist er, was den Einfluss des Nenners p_2 betrifft, im ersten Falle ein Minimum, im zweiten ein Maximum, wenn er absolut genommen in beiden Fällen ein Maximum, sonach $p_2=p'$ ist. Dadurch findet der Ausdruck 30) seine Erklärung. —

Die für den Fall, wo die Stützen in gleicher Höhe liegen, auszuführenden Rechnungen sind im Wesentlichen oben angegeben. Zur Berechnung des Verhältnisses λ, bei welchem das durch Gleichung 20) bestimmte Spannungsmoment $-[A_1]$ ein Minimum wird, ist natürlich zunächst l in dieser Gleichung durch die einzig gegebene Gesammtlänge $L = 2l + l_1 = l(2+\lambda)$ auszudrücken, also $l = \frac{L}{2+\lambda}$ zu setzen, bevor die Gleichung 32) entsprechend der Bedingung

$$\frac{d(-[A_1])}{d\lambda} = 0$$

abgeleitet werden kann. Durch diese Gleichung 32) wird trotz ihres höheren Grades eine Mehrfachheit des Werthes λ nicht herbeigeführt, weil sie stets nur eine positive Wurzel hat (nach dem Cartesischen Satz, indem ihr Polynom nur einen Zeichenwechsel hat).

Für den Fall gleich grosser Oeffnungsweiten ($\lambda = 1$), dessen Vortheilhaftigkeit der grösstmöglichen bei gleicher Höhe der Stützen zu erreichenden fast gleich kommt, und welcher daher seiner grösseren Einfachheit wegen für die praktische Ausführung besonders zu empfehlen ist, hat man nach Gleichung 20), 21) und 23):

$$-[A_1] = \frac{2\left(7 - \frac{p'}{p}\right)}{15} \cdot \frac{p l^2}{8}$$

$$[M] = \left(\frac{9 - \frac{p'}{p}}{10}\right)^2 \frac{p l^2}{8}; \quad [M_1] = \frac{3 - 2\frac{p'}{p}}{5} \cdot \frac{p l^2}{8},$$

von welchen Werthen der erste als der unter allen Umständen grösste erkannt wird, indem:

$$\left(\frac{9 - \frac{p'}{p}}{10}\right)^2 = \frac{81 - 18\frac{p'}{p} + \left(\frac{p'}{p}\right)^2}{100} < \frac{41 - 9\frac{p'}{p}}{50} =$$

$$= \frac{12{,}3 - 2{,}7\frac{p'}{p}}{15} < \frac{14 - 2\frac{p'}{p}}{15}$$

und

$$\frac{3 - 2\frac{p'}{p}}{5} = \frac{9 - 6\frac{p'}{p}}{15} < \frac{14 - 2\frac{p'}{p}}{15}$$

ist. —

Die Berechnung der zugleich vortheilhaftesten Vertheilung und Senkung der Mittelstützen nach Gleichung 35) und 36) bedarf keiner näheren Erklärung.

Indessen mag hier noch bemerkt werden, dass es auch bei bereits ausgeführten Brücken mit gleicher Höhenlage der Stützen, bei welchen die Oeffnungsweiten l und l_1 unabänderlich gegeben sind und im Allgemeinen nicht in jenem vortheilhaftesten Verhältnisse λ zu einander stehen, in Frage kommen kann, ob die nachträgliche Senkung der Mittelstützen sich verlohnt, und wie gross dieselbe sein muss, um das grösste Spannungsmoment so klein als möglich zu erhalten. Auch diese Frage ist von Mohr in dem oben erwähnten Aufsatze näher untersucht worden. Man hat dabei zu erwägen, dass bei gleicher Höhe der

Stützen und bei den üblichen Verhältnissen der Weiten l und l_1 das Maximal-Spannungsmoment — $[A_1]$ das absolut grösste ist, dass dasselbe aber durch Senkung der Mittelstützen kleiner wird, während die Spannungsmomente $[M]$ und $[M_1]$ grösser werden, und dass mithin die vortheilhafteste Senkung erreicht ist, sobald eins dieser beiden Momente $= -[A_1]$ wird. Welches von beiden zuerst $= -[A_1]$ wird, also $= -[A_1]$ gesetzt werden muss, um aus der so erhaltenen Gleichung das die vortheilhafteste Senkung a_1 nach Gleichung 18) bestimmende Verhältniss $\frac{\pi}{p}$ zu berechnen, ist leicht zu entscheiden durch Vergleichung des gegebenen mit dem durch Gleichung 36) bestimmten vortheilhaftesten Werth des Verhältnisses λ: ist ersterer grösser, also die Mittelweite l_1 im Vergleich mit 36) zu gross gegeben, so wird eher $[M_1]$, im anderen Fall eher $[M]$ bei Senkung der Mittelstützen $= -[A_1]$ werden.

Die Ausführung der hier angedeuteten Rechnung ergiebt nach Mohr, dass das der relativ vortheilhaftesten Senkung a_1 entsprechende Verhältniss $\frac{\pi}{p}$ mit hinlänglicher Genauigkeit zu berechnen nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{p} &= 0{,}21 + 0{,}07\,\frac{p'}{p}, \quad \text{wenn } \lambda = 1;\\ \frac{\pi}{p} &= 0{,}40 + 0{,}032\,\frac{p'}{p}, \quad \text{wenn } \lambda = \frac{7}{6};\\ \frac{\pi}{p} &= 0{,}40 + 0{,}031\,\frac{p'}{p}, \quad \text{wenn } \lambda = \frac{6}{5} \text{ und } \frac{5}{4}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{r)}$$

gegeben ist; und zwar kann die durch solche Senkung erreichbare Verminderung des zuvor bei gleicher Höhe der Stützen vorhanden gewesenen grössten Spannungsmoments betragen bei $\lambda = 1$ bis 14%, bei $\lambda = 7/6$ bis 28%, bei $\lambda = 6/5$ bis 26%, bei $\lambda = 5/4$ bis 24%, wobei wieder die grössten Vortheile den grössten Werthen von $\frac{p'}{p}$ entsprechen. Auch ergeben sich die durch die Senkung erzielten Werthe des Maximalmomentes $[\Xi]$ nur um höchstens wenige Procente grösser als solche unter übrigens gleichen Umständen bei gleichzeitig vortheilhaftester Vertheilung und Senkung der Mittelstützen stattfinden würden.

Die nachträgliche Ausführung der Senkung der Mittelstützen bei bereits bestehenden Brücken mit continuirlichen Hauptträgern kann hiernach nur empfohlen werden; jedenfalls erreicht man dadurch den Vortheil, dass zufällige Höhenveränderungen, gegen welche man in keinem Falle sicher ist, möglichst gross werden können, ohne dass die schädlichen Folgen derselben ein bestimmtes Maass überschreiten. —

Zur Vergleichung der verschiedenen Methoden, die Breite der Auflagerfläche auf den Strompfeilern eines continuirlichen Brückenträgers in Rechnung zu ziehen, möge ein auf zwei Uferpfeilern und einem Strompfeiler liegender Träger betrachtet werden, für welchen $\frac{p'}{p} = \frac{1}{3}$ angenommen wird; jede der beiden Oeffnungen, zwischen den einander zugekehrten Kanten der Auflagerflächen gemessen, sei 40^m weit, der Strompfeiler zwischen den Kanten seiner Auflagerfläche (event. zwischen den äusseren Kanten der beiden auf ihm liegenden Lagerflächen, eisernen Schuhe oder dergleichen) gemessen sei 4^m breit; alle Auflagerflächen mögen in einer Horizontalebene liegen.

Bei dem gewöhnlichen Verfahren, bei welchem das 4^m lange Trägerstück über dem Strompfeiler ganz ausser Acht gelassen, der Träger also so berechnet wird, als ob er bei 80^m Länge an den Enden und in der Mitte in Querlinien unterstützt wäre, findet man das grösste Spannungsmoment und die grösste Schubkraft, welche zu gleicher Zeit bei vollständiger Belastung in der Trägermitte stattfinden, nach Gleichung 16) für $l = 40$:

$$[\Xi] = 200\, p \text{ Meterkil.}; \quad \Xi = 25\, p \text{ Kil.}$$

Nach dem von den Ingenieuren Fr. Laissle und Ad. Schübler in ihrem Werke: „Der Bau der Brückenträger etc." empfohlenen und angewendeten Verfahren ist von der Strompfeilerbreite die Hälfte zu vernachlässigen und je $1/4$, also 1 Meter jeder der beiden Oeffnungsweiten hinzuzufügen, übrigens wie im vorigen Falle zu rechnen; demgemäss erhält man mit $l = 41$ nach Gleichung 16):

$$[\Xi] = 210{,}1\, p \text{ Meterkil.}; \quad \Xi = 25{,}6\, p \text{ Kil.}$$

Berechnet man aber endlich den Träger wie einen auf 4 Stützen $A\, A_1\, A_2\, A_3$ liegenden, während dabei

$$A A_1 = A_2 A_3 = l = 40^m; \quad A_1 A_2 = l_1 = 4^m; \quad \text{also } \lambda = 0{,}1$$

ist, so hat man, zunächst die Belastungen pr. Längeneinheit der einzelnen Trägerstrecken unbestimmt lassend, nach Gleichung m), n) und p):

$$-[A_1] = \frac{22\, p_1 + 0{,}021\, p_2 - p_3}{48{,}3} \cdot \frac{l^2}{4}$$

$$-A_1' = \frac{118{,}6\, p_1 + 0{,}021\, p_2 - p_3}{48{,}3} \cdot \frac{l}{4}; \quad A_1'' = \frac{p_1 + 0{,}042\, p_2 - p_3}{0{,}21} \cdot \frac{l}{4}$$

$$A_1 = -A_1' + A_1'' = \frac{166\, p_1 + 4{,}61\, p_2 - 110\, p_3}{23} \cdot \frac{l}{4}.$$

Sofern alle diese die grösste Inanspruchnahme des Materials bestimmenden Werthe um so grösser sind, je grösser p_1 und p_2 sind und je kleiner p_3 ist, würde man ihre grössten Werthe erhalten, wenn man p_1 und $p_2 = p$, $p_3 = p'$ setzte, wenn nicht der dadurch wegen $p' = \frac{1}{3} p$ negativ ausfallende Werth von A_2:

$$A_2 = \frac{166\, p_3 + 4{,}61\, p_2 - 110\, p_1}{23} \frac{l}{4} = \frac{166\, p' - 105{,}39\, p}{23} \frac{l}{4}$$

lehrte, dass der fragliche Belastungszustand eine Erhebung des Trägers von der Stütze A_2 zur Folge haben, also einen Zustand der Unterstützung herbeiführen würde, für den die obigen Ausdrücke keine Gültigkeit haben, für den vielmehr das Spannungsmoment und die Schubkraft bei vollständiger Belastung, mithin auch bei dem grössten Werth von p_3 am grössten wären. Indem aber bei wachsendem p_3, schon ehe $p_3 = p$ geworden, der ursprüngliche Zustand der vierfachen Unterstützung wieder eintreten würde, so muss man schliessen, dass das Moment $-[A_1]$ sowie die Schubkräfte $-A_1'$ und A_1'' dann am grössten sind, wenn bei Belastung von $A A_1$ und $A_1 A_2$ mit p'' pro Längeneinheit (ausser dem Eigengewicht p') die Strecke $A_2 A_3$ mit einer zufälligen Last $< p''$ pr. Längeneinheit, nämlich von solcher Schwere belastet ist, dass eben der Zustand der dreifachen in den der vierfachen Unterstützung übergeht, sonach der Druck A_2 auf die gleichnamige Stütze = Null ist. Als Bedingung dafür erhält man:

$$p_3 = \frac{105,39}{166} p = 0,635\,p$$

$$p_3 - p' = 0,302\,p = 0,453\,p''$$

und damit, sowie mit p_1 und $p_2 = p$:

$$-[A_1] = 177,1\,p = [\Xi]; \quad -A_1' = 24,4\,p = \Xi; \quad A_1'' = 19,4 \cdot p.$$

Man sieht also, dass das gewöhnliche Verfahren der gänzlichen Vernachlässigung der Auflagerbreiten in diesem Falle sich mehr der Wahrheit nähert als das vermeintliche Correctionsverfahren, dass aber beide Rechnungsarten das grösste Spannungsmoment wesentlich fehlerhaft ergeben. —

Betreffend das abgeänderte Aufstellungsverfahren continuirlicher Träger (nachträgliche Verbindung der zunächst isolirt über den einzelnen Oeffnungsweiten aufgestellten und der Wirkung des Eigengewichtes überlassenen Trägerstücke) ist für den dreifach gestützten Träger, wenn p_1 und $p_2 = p'$ gesetzt werden, nach Gleichung i) das Spannungsmoment $-[A_1] =$ Null, wenn $\pi = 2p'$ ist, und befindet sich also der Träger nach Herstelluug der Continuität in demselben Zustande, als ob der ursprünglich continuirlich und mit ebener Unterfläche hergestellte Träger auf 3 Stützen gelegt worden wäre, von denen die mittlere nach Gleichung 12) um $2p'\frac{l^4}{48EJ}$ tiefer liegt als die beiden äusseren. Wird also ausserdem diese Stütze noch nachträglich um $a_1 = \pi\frac{l^4}{48EJ}$ gesenkt, so verhält sich der Träger gerade so als ob bei dem gewöhnlichen Aufstellungsverfahren die Senkung der Mittelstütze

$$(2p' + \pi)\frac{l^4}{48EJ}$$

betragen hätte, so dass also die früheren Formeln für ihn gelten, wenn darin nur $2p' + \pi$ statt π gesetzt wird. Insbesondere ergiebt sich durch diese Substitution aus Gleichung 17a) die Gleichung 37), welche die vortheilhafteste nachträgliche relative Senkung der Mittelstütze angiebt.

Bei dem vierfach gestützten Träger ist im unbelasteten Zustande, d. h. für $p_1 = p_2 = p_3 = p'$ nach Gleichung m) das Moment $-[A_1] =$ Null, wenn $\pi = (1 + \lambda^3)\,p'$ ist, woraus sich wie zuvor ergiebt, dass, unter $a_1 = \pi\frac{l^4}{24EJ}$ jetzt die nachträgliche relative Senkung der Mittelstützen verstanden, die früheren Formeln gültig bleiben, falls nur $(1 + \lambda^3)p' + \pi$ statt π darin gesetzt wird. Insbesondere zum Zweck der vortheilhaftesten Lagerung ergiebt sich aus 36):

$$\frac{\pi}{p} = 0,4 + 0,32\frac{p'}{p} - (1 + \lambda^3)\frac{p'}{p} = 0,4 - (0,68 + \lambda^3)\frac{p'}{p}$$

und daraus die Gleichung 38), wenn näherungsweise

$$\lambda^3 = \left(1,13 + 0,04\frac{p'}{p}\right)^3 = 1,44 + 0,16\frac{p'}{p}$$

eingesetzt wird. —

Die durch Gleichung 7) dargestellte Beziehung zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über 3 aufeinander folgenden Stützpunkten eines mehrfach gestützten Trägers ist zuerst von dem französischen Ingenieur CLAPEYRON in den *Comptes rendus* v. 28. Dec. 1857

bekannt gemacht worden, wobei jedoch eine gleiche Höhe der Stützen vorausgesetzt war und deshalb das letzte Glied fehlte; durch die Hinzufügung dieses Gliedes wurde die Relation von Mohr, Ingenieur-Assistent in Lüneburg, verallgemeinert: Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen in der Zeitschr. des Archit. u. Ingen. Vereins f. d. Königr. Hannover, Jahrg. 1860.

Schon früher war auf den Vortheil aufmerksam gemacht worden, welcher durch angemessene Senkung der Mittelstützen Behufs Erhöhung der Tragfähigkeit eines continuirlichen Trägers erreicht werden kann, und zwar, wie es scheint, zuerst von

Lamarle: *L'Institut.* 1855. Sect. I. (Sitzungsbericht der Acad. Roy. d. Belg. v. 3. März 1855);

demnächst von

Leclerc: *Annales des travaux publ. d. Belg.* 1855—56;
Köpke: Zeitschr. des Arch. u. Ingen. Vereins f. d. Königr. Hannover, Jahrg. 1856;
Grashof: Zeitschr. des Vereins deutscher Ingen. 1857;
Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig 1857.

Bei diesen ersten Bestimmungen der vortheilhaftesten Senkung und in Verbindung damit der vortheilhaftesten Vertheilung der Mittelstützen zwischen den beiden Endstützen wurde eine über der ganzen Länge des Trägers gleichmässig vertheilte Last, also der Zustand der vollständigen Maximalbelastung des Trägers vorausgesetzt, unter welcher Voraussetzung sich ergiebt, dass die Mittelstützen in der Peripherie eines grossen Kreises in gleichen und solchen Entfernungen von einander liegen müssen, dass deren Verhältniss zu den beiden gleichen Aussenöffnungen $= 2(2-\sqrt{2}) = 1{,}172$ oder ungefähr $= 7/6$ ist. Die Berücksichtigung der verschiedenen Belastungszustände, welche bei einem Brückenträger vorkommen können, bei den fraglichen Untersuchungen wurde bezüglich auf einen dreifach und vierfach gestützten Träger zuerst von Mohr in dem oben erwähnten Aufsatz: „Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen" vollständig durchgeführt, dabei jedoch unterlassen die Grenzbedingungen aufzusuchen, bei welchen die gefundenen Resultate einzig gelten, d. h. bei welchen sowohl sämmtliche Stützen bei allen möglichen Belastungszuständen mit dem Träger in Berührung bleiben, als auch die Spannungsmomente in den mittleren Querschnitten wirklich für diejenigen Belastungszustände am grössten werden, von denen dies ohne Weiteres angenommen wurde. Indessen war Mohr der Erste, welcher zugleich die Mängel dieses Verfahrens, die Tragfähigkeit eines Balkens zu erhöhen, nachdrücklich hervorhob und ausführlich erörterte, und endlich ein neues Aufstellungsverfahren angab, wodurch dieselben sich zum Theil vermeiden lassen.

Eine rationellere Berücksichtigung der Auflagerbreiten eines Brückenträgers auf den Mittelpfeilern, welche man sonst einfach zu vernachlässigen pflegte, wurde zuerst von den Ingenieuren

Fr. Laissle und Ad. Schübler: Der Bau der Brückenträger mit wissenschaftlicher Begründung etc. Stuttgart, 1857

versucht, das empfohlene Verfahren jedoch von Mohr als irrig nachgewiesen.

Ebenso wurde die Bestimmung des vortheilhaftesten Verhältnisses λ der Mittelöffnung zu den Aussenöffnungen bei einem auf 4 gleich hohen Stützen liegenden Träger, welches Laissle und Schübler > 1 und zwar $= \frac{6}{5}$ bis $\frac{5}{4}$ gefunden hatten, indem sie es auf die unmotivirte Forderung basirten, dass die Tangente der elastischen Linie über den Mittelstützen bei vollständiger Belastung horizontal sein solle, von Mohr auf richtige Principien zurückgeführt und dadurch < 1 gefunden.

§. 33. Blechwandträger.

Unter den nach dem System der erhöhten Balken construirten Brückenträgern stehen die ohne Durchbrechungen aus Blechtafeln zusammengenieteten Blechwandträger den einfachen Balken am nächsten. Sie haben in ihrer einfachsten Form einen doppelt T-förmigen Querschnitt, indem eine obere und untere sogenannte Gurtung, aus je einer oder mehreren horizontal auf einander liegenden Blechtafeln bestehend, durch eine einfache verticale Blechwand in der Mitte verbunden sind. Die Verbindung geschieht durch Vernietung mit Winkeleisen, welche in die vier Flächenwinkel eingelegt werden. Die einzel-

nen Tafeln der Blechwand werden mit ihren Rändern stumpf zusammengestossen und die Fugen durch aufgenietete Blätter (Blechstreifen), die verticalen Fugen insbesondere zur Versteifung der Wand gewöhnlich durch je zwei Winkel- oder ein T-Eisen gedeckt, wenigstens an der äusseren Wandfläche an den mit solchen Stössen zweckmässig zusammenfallenden Stellen der Querträger. Die letzteren, welche man, sofern ihre Höhenlage nicht anderweitig durch die Umstände bedingt ist, ungefähr in die halbe Höhe der Hauptträger zu legen pflegt, werden durch angenietete Blechlappen, die bis zu den Gurtungen, wenigstens bis zu einer derselben hinab- oder hinaufreichen, mit den Hauptträgern verbunden; die Diagonalverstrebung der Querträger durch sich kreuzende schmiedeiserne Stangen erhöht die Sicherheit jener Verbindungen, insbesondere gegen den von der Seite einwirkenden Druck des Windes.

In Deutschland giebt man den Gurtungen der Blechträger gewöhnlich nicht über 1 Fuss Breite; macht man sie breiter, wie namentlich in England üblich, so wird eine sorgfältige Absteifung derselben durch rechtwinkelig aufgesetzte, vermittelst Winkeleisen mit ihnen und mit der Mittelwand vernietete Bleche oder durch andere Mittel nöthig. Um insbesondere der Neigung einer breiten und dünnen oberen (auf Druck in Anspruch genommenen) Gurtung zu einer faltigen Verwerfung entgegenzuwirken, giebt man ihr eine nach Oben convexe seitliche Krümmung, verstärkt die herabgebogenen Ränder durch aufgenietete Winkeleisen und strebt dieselben gegen die Mittelwand ab.

Die Träger, welche eine Oeffnung von geringerer Weite überdecken, ruhen mit ihren Enden unmittelbar auf festliegenden eisernen Platten; bei grösserer Weite muss dem Einfluss der Temperaturveränderungen Rechnung getragen werden, und erhalten deshalb die Träger nur an einem Ende ein festes Auflager in einem gusseisernen Schuh, während sie mit dem anderen auf gusseiserne Walzen gelegt werden, deren Axen durch einen schmiedeisernen Rahmen in unveränderlichen Entfernungen erhalten sind. Continuirliche Träger werden nur auf einem mittleren Pfeiler fest, auf allen übrigen vermittelst Walzenschuhe gelagert. An Stelle der Walzen hat man auch wohl eigenthümlich angebrachte Kippstützen oder endlich einfach behobelte und mit einer Oelschicht bedeckt erhaltene gusseiserne Platten angewendet, auf denen die Träger mit ihren gleichfalls behobelten Auflageplatten liegen. — Die Auflagerfläche wird so bemessen, dass das Mauerwerk mit etwa 100 Pfd. pro Quadratzoll (7,3 Kilgr. pro Quadratcentimeter) gedrückt wird.

Von principiell gleicher Wirkung, aber weniger einfach sind die besonders in England (nach W. Fairbairn's Patent) ausgeführten kastenförmigen Träger: hohle parallelepipedische, aus Blechtafeln zusammengenietete Kasten, wie solche aus einem doppelt T-förmigen Träger hervorgehen, wenn man die Mittelwand in ihrer Mittelebene spaltet und die beiden Hälften bis gegen die Ränder der Gurtungen nach Aussen rückt; von diesen Gurtungen bildet hier gewöhnlich die obere selbst wieder einen parallelepipedischen hohlen Balken für sich, der in der Breite nach beiden Seiten etwas hervorragt und häufig im Inneren durch eine der Länge nach laufende verticale eiserne Platte in zwei Zellen getheilt ist.

Endlich gehören hierher die Röhrenbrücken, sofern die beiden Seitenwände der einzigen parallelepipedischen Röhre, welche hier Haupt- und Querträger in sich vereinigt darstellt, als volle Blechwände hergestellt werden, wie es bei den ursprünglichen Ausführungen (Britannia- und Conway-Brücke) der Fall war. Indem der Unter- und Oberrahm bei diesen Trägern als Boden resp. Decke der Röhre bis zur ganzen Brückenbreite verbreitert ist, würden beide eine nur sehr geringe Dicke erfordern, wenn nicht die Rücksicht auf möglichst gleichförmige Inanspruchnahme in der ganzen Breite, bei dem gedrückten Rahm zugleich die Gefahr einer zur Zerknickung führenden faltigen Biegung und bei dem unteren Rahm die von demselben gleichzeitig zu übernehmende Function der Querträger eine sorgfältige entsprechende Verstärkung nöthig machte, wie solche namentlich durch eine zellenförmige Construction und durch von Aussen aufgenietete Querrippen erreicht wird. Immerhin liegt in der Ersparung der Querträger und Windstreben ein ökonomischer Vortheil der Röhrenbrücken. —

Im Folgenden wird die einfachste Form eines Blechwandträgers vorausgesetzt, bei welcher der Querschnitt die Form eines doppelten T hat, etwas modificirt durch die zur Verbindung der Gurtungen mit der Mittelwand dienenden Winkeleisen (*Fig. 63*). Sind dann M und R die nach dem vorigen Paragraph zu berechnenden Absolutwerthe des Spannungsmoments und der Schubkraft für einen gewissen Querschnitt, so kommt es zunächst darauf an, die ihnen bei gegebenen Dimensionen des Querschnitts entsprechende grösste Ausdehnung zu berechnen, welche in einer horizontalen Geraden im Abstande z von der Biegungsaxe nach irgend einer Richtung hin stattfindet; die Forderung, dass diese Ausdehnung für jedes z einen gegebenen Werth nicht überschreiten solle, ergiebt alsdann gewisse Bedingungen, denen die Querschnittsdimensionen eines zu entwerfenden Blechträgers entsprechen müssen.

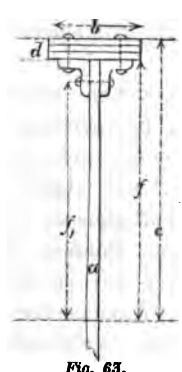


Fig. 63.

Aus den Gesetzen der zusammengesetzten Festigkeit ergiebt sich aber, wenn für einen gewissen Punkt des Querschnitts

σ die Normalspannung, absolut genommen,

τ die (vertical gerichtete) Tangentialspannung,

σ' den mit dem Elasticitätsmodul E multiplicirten Absolutwerth λ' der grössten Ausdehnung bedeutet (deren Richtungslinie in der auf dem Querschnitt senkrechten Verticalebene liegt, und welche positiv oder negativ, d. h. eine eigentliche Ausdehnung oder Compression ist, je nachdem die Normalspannung σ eine Spannung im engeren Sinne oder Pressung ist, je nachdem folglich der betreffende Punkt auf der einen oder anderen Seite der Biegungsaxe liegt),

und wenn das Material als isotrop vorausgesetzt wird:

$$\sigma' = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

Dabei ist nach §. 7:

$$\sigma = \frac{Mz}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2),$$

unter J das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Biegungsaxe verstanden. Was aber die Tangentialspannung τ betrifft, so bedarf ihre Abhängigkeit von z einer näheren Untersuchung; wollte man sie, den in §. 22 gemachten Annahmen entsprechend, constant für alle Punkte des Querschnitts $q = \frac{R}{q}$ setzen, so würde daraus für die erforderliche Dicke der Mittelwand des Blechträgers eine wesentlich fehlerhafte Bedingung hervorgehen.

In der That ist das Aenderungsgesetz der Tangentialspannung von einem zum anderen horizontalen Flächenstreifen $dq = y \cdot dz$ des Querschnitts (y Breite im Abstande z von der Biegungsaxe) bedingt durch das Aenderungsgesetz der Normalspannungen σ von dem betrachteten zu dem im Abstande dx unendlich nahe benachbarten Querschnitt, und zwar ergiebt sich für eine beliebige Querschnittsform, wenn e das grösste z bedeutet:

$$\tau y = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_z^e z \cdot dq\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Von der Biegungsaxe aus nach Oben und Unten nimmt dieses Product τy ab. Ist der Querschnitt constant, so ist auch:

$$\tau y = \frac{R}{J}\int_z^e z \cdot dq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4),$$

welche Gleichung übrigens auch für alle solche Fälle zu Grunde gelegt werden kann, in denen wie bei Brückenträgern die Aenderungen der Querdimensionen nur klein sind im Vergleich mit der Aenderung von x.

Die specifische Tangentialspannung τ nimmt in der Regel ebenso wie τy von der Biegungsaxe aus nach Oben und Unten hin beständig ab, jedenfalls dann, wenn die Breite y nicht abnimmt. Wenn aber die Breite y mit wachsendem z abnimmt, so kann es sein, dass τ zunächst von der Biegungsaxe aus zunimmt, um erst später wieder abzunehmen: für $z = e$ ist immer $\tau = 0$. Eine Querschnittsform, für welche streng genommen in allen Punkten τ gleich gross wäre, ist also nicht möglich.

Für einen rechteckigen Querschnitt z. B. mit den horizontalen Seiten b und verticalen Seiten h findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \tau = \frac{3}{2}\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\frac{R}{q} \\ \text{am grössten für } z = 0\text{, und zwar} \\ \tau' = \frac{3}{2}\frac{R}{q} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5).$$

Für einen Kreis mit dem Radius r ist im Abstande $z = r \sin\varphi$ von der Biegungsaxe:

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \frac{4}{3}\cos^2\varphi \cdot \frac{R}{q} \\ \text{am grössten für } \varphi = 0: \quad &\tau' = \frac{4}{3}\frac{R}{q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6).$$

Wäre aber z. B. der Querschnitt ein **übereck liegendes Quadrat** mit der Seite a, so wäre nicht mehr in der Biegungsaxe τ am grössten; man findet:

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \left(1 + \sqrt{2}\,\frac{z}{a} - 4\frac{z^2}{a^2}\right)\frac{R}{q} \\ \text{am grössten für } z = \frac{\sqrt{2}}{8}\,a = 0{,}177\,a, \text{ und zwar} \quad &\tau' = \frac{9}{8}\frac{R}{q}, \\ \text{während für } z \doteq 0: \quad &\tau = \frac{R}{q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7).$$

Wenn man die Ausdrücke von σ und τ nach 2) und 4) in Gleichung 1) einsetzt, só erhält man:

$$\sigma' = \frac{M}{8J}\left[3z + 5\sqrt{z^2 + 4\frac{R^2}{m^2}\left(\frac{1}{y}\int_z^e z \cdot dq\right)^2}\,\right] \quad \ldots \quad 8)$$

als allgemeinen Ausdruck für die der grössten Ausdehnung im Abstande z von der Biegungsaxe entsprechende Normalspannung. Sie ist in Folge der entgegengesetzten Veränderlichkeit von σ und τ im Allgemeinen für einen mittlern Werth von z zwischen den äussersten Grenzen 0 und e am grössten.

Bei einem **Blechträger** insbesondere, also einem Querschnitt von der Form *Fig. 63* seien, wenn im Allgemeinen verschiedene Dimensionen der oberen und unteren Gurtung vorausgesetzt werden,

e und e' die Maximalwerthe von z auf der einen und anderen Seite der Biegungsaxe,
b und b' die Breiten,
d und d' die Dicken der Gurtungen,
$f = e - d$; $f' = e' - d'$; $f + f' = h$,
a die Dicke der Mittelwand,
a_1 die doppelte Dicke, b_1 die Summe der Schenkellängen eines Winkeleisens,
f_1 und f_1' die Werthe von z auf der einen und anderen Seite der Biegungsaxe bis zu den Anfängen der Winkeleisen oder vielmehr bis zu den ihre verticalen Schenkel unter sich und mit der Wand verbindenden Nieten gerechnet.

In der Regel erhalten beide Gurtungen einerlei Dimensionen, und liegt dann auch die Biegungsaxe in der Mitte der Höhe h. Im Allgemeinen aber kann man mit Rücksicht darauf, dass d sehr klein im Vergleich mit f und die

Summe der Querschnitte zweier Winkeleisen d. i. $a_1 b_1$ gewöhnlich klein im Vergleich mit dem Querschnitt bd der zugehörigen Gurtung ist, mit genügender Näherung setzen:

$$f = \frac{1+n}{2} h; \quad f' = \frac{1-n}{2} h; \quad n = \frac{b'd' - bd}{q} \quad . \quad . \quad . \quad 9),$$

unter

$$q = bd + b'd' + 2a_1 b_1 + ah$$

den Inhalt des ganzen Querschnitts verstanden; ferner:

$$J = \left(bd + a_1 b_1 + \frac{af}{3}\right) f^2 + \left(b'd' + a_1 b_1 + \frac{af'}{3}\right) f'^2 \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

oder noch einfacher:

$$J = \left(bd + a_1 b_1 + \frac{af}{3}\right) fh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10a).$$

Die erforderliche Dicke a der Wand ist vorzugsweise durch R bestimmt, nämlich durch den Werth von σ' in der Biegungsaxe:

$$z = 0; \quad \sigma' = \frac{5}{4} \frac{R}{J} \left(bd + a_1 b_1 + \frac{af}{2}\right) \frac{f}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11),$$

woraus mit dem Näherungswerth von J nach 10a) sich ergiebt:

$$\sigma' > \frac{5}{4} \frac{R}{ah} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11a).$$

Die erforderliche Dicke einer Gurtung ist vorzugsweise durch M, nämlich durch den Werth von σ' in der grössten Entfernung e von der Biegungsaxe bestimmt:

$$z = e; \quad \sigma' = \frac{Me}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12),$$

woraus mit dem Näherungswerth von J nach 10a) sich ergiebt:

$$\sigma' > \frac{M}{\left(bd + a_1 b_1 + \frac{af}{3}\right) h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12a).$$

Wenn man aber erwägt, dass bis zu den Winkeleisen die Tangentialspannung τ mit wachsendem z, die Normalspannung σ mit abnehmendem z nur wenig abnimmt, so kann auch dort zwischen $z = f_1$ und $z = f$ das Maximum von σ' erwartet werden, welches zugleich durch R und M bedingt ist, und zwar ist es zur Erkennung des absoluten Maximums genügend, ausser für $z = 0$ und $z = e$ nur noch diejenigen beiden Werthe von σ' als relative Maxima zu vergleichen, welche $z = f_1$ und $z = f - \frac{a_1}{2}$ entsprechen und welche mit genügender Näherung wie folgt gefunden werden:

$$z = f_1; \quad \sigma' = \frac{M}{8J}\left(3f_1 + 5\sqrt{f_1^2 + 4\frac{R^2}{M^2}(bd + a_1 b_1)^2 \frac{f^2}{a^2}}\right) \quad \ldots \quad 13)$$

$$z = f - \frac{a_1}{2}; \quad \sigma' = \frac{M}{8J}\left(3f + 5\sqrt{f^2 + 4\frac{R^2}{M^2}(bd)^2 \frac{f^2}{a_1^2}}\right) \quad \ldots \quad 14).$$

Die Anwendung dieser und der vorhergehenden Formeln bei der Berechnung eines Blechwandträgers macht nun aber noch die Berücksichtigung des Umstandes nöthig, dass das Material nicht, wie bei der Entwickelung zunächst stillschweigend vorausgesetzt wurde, einen continuirlichen Zusammenhang hat, dass vielmehr in Wirklichkeit der Träger aus einzelnen plattenförmigen Stücken zusammengenietet ist. Die Buchstaben a b d b_1 bedeuten deshalb in den Formeln nicht die wirklichen, sondern die mit Rücksicht auf die Verschwächung durch Nietlöcher und Stösse reducirten betreffenden Dimensionen.

Die Niete, welche zur Verbindung der Winkeleisen mit den Gurtungen dienen, durchdringen sämmtliche Blätter, aus denen die letzteren bestehen, und vermindern also den Querschnitt bd um eine dem Axenschnitt ihres Schaftes gleiche, d. h. die Breite b um eine ihrem Durchmesser δ gleiche Grösse. Um diese Verminderung der wirksamen Breite der Gurtung auf den einfachen Durchmesser δ herabzuziehen, kann man die Nietreihe des einen Winkeleisens so gegen diejenige des anderen Winkeleisens versetzen, dass die Niete jeder Reihe mit den Mitten der Zwischenräume der anderen correspondiren; wegen des mehr oder weniger schlangenförmigen Laufs, welcher dadurch der in den Gurtungen fortgepflanzten Kraft angewiesen wird, ist es übrigens angemessen, auch in solchem Falle mehr als das einfache δ, etwa $\frac{3}{2}\delta$ von der Breite abzurechnen.

Was die Niete betrifft, welche die Winkeleisen mit der Mittelwand verbinden, so wird dadurch die Widerstandsfähigkeit der Wand gegen die Tangentialspannung des betreffenden Horizontalschnitts im Verhältniss $\varepsilon_1 - \delta_1 : \varepsilon_1$ vermindert, wenn δ_1 der Durchmesser und ε_1 die Entfernung der betreffenden Nietlöcher von Mitte zu Mitte ist. Demgemäss ist auch a in Gleichung 13) = der in diesem Verhältniss verminderten Blechstärke der Wand zu nehmen.

In Folge der den beiden erwähnten Nietsystemen entsprechenden Durchbohrungen der Winkeleisen wird deren wirksame Schenkellänge b_1 im ungünstigsten Falle um $\delta + \delta_1$ vermindert, wofür man nur $\frac{3}{4}\delta + \delta_1$ zu rechnen braucht, wenn die Niete der beiden Reihen des erstgenannten Nietsystems in der erwähnten Weise gegeneinander versetzt sind, und nur $\frac{1}{2}\delta + \delta_1$, wenn auch noch die unter sich versetzten Niete beider Reihen des ersten Systems gegen die des zweiten versetzt sind.

Ausser den Nieten, welche mit Hülfe der Winkeleisen die Verbindung der Gurtungen mit der Blechwand bewirken, hat man bei der letzteren noch verticale, bei grösserer Höhe h vielleicht auch noch horizontale Nietreihen, den Stössen der Blechplatten entsprechend, aus denen die Wand gebildet ist. Ist dabei δ_0 der Durchmesser, ε_0 die Entfernung der Nietlöcher von Mitte zu Mitte,

so wird die Wand im Verhältniss $\varepsilon_0 - \delta_0 : \varepsilon_0$ geschwächt, welchem Umstande dadurch Rechnung zu tragen ist, dass in allen obigen Formeln ausser in 13) unter a die in diesem Verhältniss verminderte Blechstärke der Wand verstanden wird.

In Betreff der Stösse zwischen den die Gurtungen bildenden Blechtafeln, welche, über die ganze Breite b sich erstreckend, den Zusammenhang einer solchen Blechlage vollständig unterbrechen, sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Versieht man den Stoss auf beiden Seiten (oberhalb und unterhalb) mit sogenannten Stossplatten, welche den Stoss überdecken und durch eine hinlängliche Zahl von Nieten mit den beiden gestossenen, überhaupt den sämmtlichen Blechtafeln der betreffenden Gurtung gehörig verbunden sind, so darf man annehmen, dass die Verschwächung der Gurtung durch die Fuge ganz vermieden wird, falls jede der beiden Stossplatten wenigstens die halbe Dicke des gestossenen Blechs hat. Indem aber die Anbringung von Stossplatten auf der Innenseite einer Gurtung d. h. auf der Seite der Winkeleisen mit Schwierigkeiten verbunden ist, beschränkt man sich meistens darauf, dergl. nur an der Aussenseite aufzunieten; in diesem Falle wird aber, wenn auch die Stossplatte ebenso dick wie das gestossene Blech gemacht wird, die Verschwächung nicht mit derselben Sicherheit wie im vorigen Falle beseitigt, weil die Spannung der gestossenen Platten von den sie durchdringenden Nieten nur zum Theil nach der Seite der Stossplatte, zum anderen Theil aber auf die innerhalb angrenzenden Blechlagen resp. auf die Winkeleisen übertragen werden kann. Endlich kann man auch bei durchweg mehrfachen Blechlagen die Anwendung von Stossplatten ganz umgeben, indem man von den vorhandenen (gewöhnlich gleich dicken) n Lagen nur $n-1$ als wirksam in Rechnung stellt, d. h. das in den Formeln vorkommende d der $(n-1)$fachen Dicke einer Blechlage gleich setzt. — In allen Fällen sind die Stösse in den verschiedenen Blechlagen so zu vertheilen, dass deren nie zwei in demselben Querschnitt zusammentreffen, vielmehr eine mehrfache Vernietung zwischen je zwei solchen Stossfugen stattfindet.

Die Stösse der Winkeleisen müssen durch entsprechende Winkeleisen gedeckt werden, und kann dann bei der mehr untergeordneten Bedeutung, welche dieselben neben ihrem wesentlichen Zweck als Verbindungsmittel ausserdem für die Erhöhung der Tragfähigkeit durch Vergrösserung des ganzen Querschnitts q haben, von der durch diese Stösse etwa bedingten Schwächung abgesehen werden.

Die Stösse der Wandbleche verursachen keine Schwächung, wenn sie von beiden Seiten durch wenigstens halb so dicke oder auch nur von einer Seite durch wenigstens ganz so dicke Stossbleche sorgfältig gedeckt werden; im letzteren Falle nämlich wie überhaupt bei den Stössen einer nur einfachen Blechlage müssen natürlich die Niete die ganze Spannung des gestossenen Blechs auf das Stossblech übertragen.

Die vorstehenden Regeln über die der Niete und Stösse wegen vorzunehmenden Reductionen der wirklichen auf die rechnungsmässigen Dimensionen $a\ b\ d\ b_1$ beziehen sich zunächst auf den Fall, dass die Normalspannung

eine eigentliche Spannung, das maassgebende grösste $\lambda = \lambda'$ folglich eine eigentliche Ausdehnung ist, wie solches in der auf der convexen Seite der elastischen Fläche liegenden Trägerhälfte stattfindet. Auf der anderen Seite dagegen würde man diese Reductionen ganz unterlassen dürfen, wenn es möglich wäre, einen ganz vollständigen Contact bei den Nieten und Stössen herzustellen. In der That ist dieses aber namentlich in den Stossfugen nicht mit Sicherheit zu erreichen, und ist daher zu empfehlen die letzteren sowohl bei der Construction als bei der Rechnung gerade so zu behandeln wie in der anderen Trägerhälfte, es sei denn, dass durch eingelegte kleine Eisenkeile die Zwischenräume sorgfältig geschlossen werden, in welchem Falle es zulässig ist die Schwächung durch die Stösse bei der gedrückten Gurtung etwa nur halb so gross zu schätzen als bei der gezogenen. Wegen der Nietlöcher braucht die Breite b der gedrückten Gurtung stets nur halb so viel reducirt zu werden, als es bei der gezogenen geschehen muss. —

Wenn man nach Obigem den Werth von σ' für alle Stellen der Blechtafeln, welche einen gegebenen und unter gegebener Belastung stehenden Träger zusammensetzen, höchstens gleich einem als zulässig gegebenen Maximalwerth $= k$ gefunden hat, so würde die dadurch verbürgte Widerstandsfähigkeit der Bleche doch werthlos für die Festigkeit des ganzen Trägers sein, wenn nicht auch die sämmtlichen Niete eine ebenso grosse Sicherheit darböten. Die Prüfung der Widerstandsfähigkeit der verschiedenen Niete gegen die auf sie einwirkenden Kräfte ist deshalb von derselben Wichtigkeit wie die Prüfung der Bleche selbst, welche durch die Niete verbunden werden.

Bei dem gewöhnlichen Verfahren der warmen Nietung, wobei das Niet rothglühend eingesteckt und aus dem vorstehenden Theil des Schaftes der sogenannte Schliesskopf durch Hämmern gebildet wird, ist es nicht die auf das Niet wirkende Schubkraft allein, welche seine Spannung bei der fertigen und belasteten Construction bedingt; zum Theil ist diese Spannung eine durch die Zusammenziehung des erkaltenden Nietes verursachte Längenspannung, und es kann in Folge der dadurch bedingten ebenso grossen Pressung zwischen den zusammengenieteten Blechen und den Nietköpfen sogar der Fall sein, dass die dieser Pressung entsprechende Reibung die Schubkraft ganz aufhebt und die Tangentialspannung im Nietquerschnitt gar nicht zur Entwickelung kommen lässt. Die Grösse jener Längenspannung ist von so verschiedenen und zum Theil nur höchst unsicher in Rechnung zu stellenden Umständen (von dem Temperaturgrad, dem Ausdehnungs-Coefficienten und der Länge des Nietschaftes, von dem bei der Stauchung des Schliesskopfes auf den Setzkopf des Nietes ausgeübten Gegendruck, von der Miterwärmung der umgebenden Blechtheile durch das heisse Niet, von der Zusammendrückbarkeit der vernieteten Bleche etc.) abhängig, dass es nur durch Versuche und zwar indirect durch Messung der entsprechenden Reibung möglich ist ein Urtheil darüber zu gewinnen. Solche Versuche sind in England bei Gelegenheit des Baues der Britannia-Brücke und später in Frankreich angestellt worden: zwei Bleche wurden mittelst zweier die Stossfuge von beiden Seiten überdeckender Stossplatten durch 2 Niete so zusammengenietet, dass die Nietbolzen in den gestossenen Platten Spielraum

hatten, und fand man dann die Zugkraft, welche das Gleiten der gestossenen Bleche zwischen den Stossplatten bewirkte, = 10—14 Kil. pr. Quadratmillim. des Nietenquerschnitts. Bei Versuchen, welche in den Jahren 1856, 57 und 59 im Auftrage der französischen Regierung von den Herren Combes, Lorieux und Couche über die Anwendung des Gussstahlblechs zur Construction der Dampfkessel angestellt wurden, ergab sich jene Zugkraft für Gussstahlblech und rothwarm angetriebene Gussstahlniete im Mittel aus 2 Versuchen = 13,1 Kil., und als zwei Blechstreifen, der eine mit ovalem Nietloch, direct mit übergreifenden Rändern durch ein Gussstahlniet verbunden wurden, im Mittel aus 2 weiteren Versuchen = 17,3 Kil. pr. Quadratmillim., welcher bedeutend grössere Werth ohne Zweifel der in diesem Falle etwas schiefen Zugrichtung und der dadurch bedingten einseitigen Pressung der Nietköpfe gegen die Bleche zuzuschreiben ist. In allen Fällen war die Reibung in 2 Reibungsflächen zu überwinden, so dass also in jeder einzelnen die Reibung wenigstens 5 Kil., die Längenspannung also bei einem auf höchstens $= \frac{1}{3}$ zu schätzenden Reibungs-Coefficienten wenigstens 15 Kil. pr. Quadratmillim. des Nietenquerschnitts betrug, eine Spannung viel grösser als diejenige, welche man sonst dem Schmiedeisen dauernd anzuvertrauen pflegt, und welche in der That die Tangentialspannung entweder gar nicht oder nur zum kleinen Theil zur Entwickelung gelangen lässt.

Jener abnorme Zustand der in den rothwarm angetriebenen Nieten vorhandenen grossen Spannung, welcher wenigstens den Vortheil hat, dass die schädlichen Wirkungen einer ungenauen Bohrung der Nietlöcher weniger dabei hervortreten, würde sich bei Blechbrücken nur mit unverhältnissmässig grösseren Kosten durch kalte Nietung oder Ersetzung der Niete durch Schraubenbolzen in Verbindung mit sehr sorgfältiger Herstellung der Nietlöcher umgehen lassen, obschon auch in diesem Falle eine immerhin nicht ganz zu vernachlässigende Längenspannung im Nietbolzen stattfinden würde ausser der Tangentialspannung, welche durch die um den Betrag der Reibung verminderte Schubkraft hervorgerufen wird. Die Berechnung der beiden Spannungen entsprechenden grössten resultirenden Ausdehnung λ' würde aber nicht nur die Kenntniss jener Längenspannung und des Reibungs-Coefficienten, sondern auch des Vertheilungsgesetzes der Tangentialspannung im Querschnitt des Nietbolzens voraussetzen und wäre deshalb in mehrfacher Hinsicht unsicher; dass nämlich die Tangentialspannung auch hier nach dem durch Gleichung 4) ausgedrückten Gesetz im Querschnitt vertheilt sei, kann wohl nicht angenommen werden, da bei der verschwindend kleinen freien Länge des Nietbolzens von einer Biegung desselben nach dem Gesetz der elastischen Linie keine Rede sein kann.

Unter diesen Umständen ist man genöthigt, die Widerstandsfähigkeit der Niete auf Grund specieller Versuche zu beurtheilen, bei welchen die Belastung bis zum Bruch gesteigert wurde. Solche Versuche, welche namentlich von W. Fairbairn in ausgedehntem Maasse angestellt wurden, haben für den Fall warmer Nietung ergeben, dass, damit der Bruch einer Nietung mit gleicher Wahrscheinlichkeit durch den Bruch der Niete wie durch das Reissen des Blechs herbeigeführt werde, die auf jeder Seite des Stosses angebrachten Niete zu-

sammen ungefähr denselben Querschnitt haben müssen wie das Blech zwischen der der Stossfuge zunächst liegenden Nietreihe, und pflegt man danach die Widerstandsfähigkeit eines Niets gegen die Einwirkung einer Schubkraft seinem Querschnitt proportional und die pro Flächeneinheit desselben höchstens zulässige Schubkraft $= k$, d. h. dem höchstens zulässigen Werth von $E\lambda$ gleich zu setzen.

Bei einem Blechträger hat man nun dreierlei Niete zu unterscheiden: diejenigen, welche die Gurtungen mit den Winkeleisen, ferner diejenigen, welche die Winkeleisen mit der Mittelwand, endlich diejenigen, welche die Wandbleche mit den ihre Stossfugen deckenden Blechstreifen oder T-Eisen verbinden. Ist für diese 3 Kategorien bezüglich $q'\, q_1'\, q_0'$ der Querschnitt eines Nietbolzens, $s\, s_1\, s_0$ die Schubkraft pro Flächeneinheit desselben, ferner für die beiden ersten Kategorien n resp. n_1 die Anzahl Niete pro Längeneinheit einer Gurtung, für die letzte n_0 die Anzahl Niete pro Längeneinheit einer Reihe auf einer Seite des Stosses, so ist:

$$s = \frac{1}{nq'}\,\frac{R}{J}\int_f^e z\cdot dq = \frac{R}{nq'}\,\frac{bd\left(f+\frac{d}{2}\right)}{J} \quad \ldots\ldots \quad 15);$$

ferner mit Rücksicht darauf, dass bei den Nieten der zweiten Kategorie die Schubkraft auf zwei Querschnitte desselben Nietbolzens sich vertheilt:

$$s_1 = \frac{1}{2n_1q_1'}\cdot\frac{R}{J}\int_{f_1}^e z\cdot dq = \frac{R}{2n_1q_1'}\,\frac{(bd+a_1b_1)f}{J} \quad \ldots\ldots \quad 16);$$

endlich wenn für die Niete der dritten Kategorie als ungünstigster Fall die Lage in der Biegungsaxe, dagegen Deckung der Stösse von beiden Seiten, also Vertheilung der Schubkraft auf 2 Querschnitte desselben Nietbolzens angenommen wird:

$$s_0 = \frac{1}{2n_0q_0'}\cdot\frac{R}{J}\int_0^e z\cdot dq = \frac{R}{2n_0q_0'}\,\frac{\left(bd+a_1b_1+\frac{af}{2}\right)f}{J} \quad \ldots \quad 17);$$

wären die Stösse nur einseitig durch einen Blechstreifen oder ein T-Eisen gedeckt, so wäre s_0 doppelt so gross. Auch in diesen Formeln sind $a\, b\, d\, b_1$ die nach den obigen Regeln reducirten betreffenden Dimensionen. —

Bei dem Entwurf eines Blechwandträgers, welcher so construirt werden soll, dass das Maximum von σ' in allen Querschnitten möglichst gleich gross $= k$ wird, kann man sich darauf beschränken, die erforderlichen Dimensionen für einige Querschnitte zu berechnen und die Abstufung derselben für die zwischenliegenden Strecken nach Schätzung resp. durch ein graphisches Verfahren zu bestimmen. Die Höhe der Blechwand, die Breiten der Gurtungen und die Dimensionen der Winkeleisen sind dabei gewöhnlich gegeben und zwar constant für die ganze Länge des Trägers, so dass es sich hauptsächlich um die Berechnung der erforderlichen Werthe der veränderlichen

Stärken a und d in den verschiedenen Querschnitten handelt; ausserdem sind die Entfernungen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_0$ der einzelnen Nietreihen zu berechnen, wenn deren Durchmesser angenommen werden: δ und δ_1 in angemessenem Verhältniss zu den Stärken der Winkeleisen und der einzelnen Platten, aus denen die Gurtungen gebildet werden, sonach constant für die ganze Länge des Trägers, δ_0 in Verhältniss zu der Stärke der Wand. Die Berechnung von ε_0 lässt sich übrigens auch mit derjenigen der Wandstärke verbinden, indem man angemessener Weise die Anordnung so trifft, dass die grösste Schubkraft s_0 in den Wandnieten gleich dem grössten σ' in dem verschwächten Wandblech wird; dieser Bedingung entsprechen bei beiderseitiger Deckung der Stösse die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} = \frac{a_0 + 2\delta_0}{a_0}; \qquad \frac{a}{a_0} = \frac{2\delta_0}{a_0 + 2\delta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18),$$

worin a_0 die wirkliche Wandstärke bedeutet zum Unterschied von der im Verhältniss $\varepsilon_0 - \delta_0 : \varepsilon_0$ verminderten rechnungsmässigen Stärke a. Im Durchschnitt ist $\delta_0 = 2a_0$ ein angemessenes und übliches Verhältniss, und wird dann

$$\varepsilon_0 = 5\delta_0; \qquad a = \frac{4}{5}a_0.$$

Wären aber die Stösse der Wandplatten nur von einer Seite durch Stossplatten oder T-Eisen gedeckt, so entsprächen derselben Bedingung die Gleichungen:

$$\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} = \frac{a_0 + \delta_0}{a_0}; \quad \frac{a}{a_0} = \frac{\delta_0}{a_0 + \delta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18a),$$

woraus mit $\delta_0 = 2a_0$ sich ergäbe: $\varepsilon_0 = 3\delta_0$ und $a = \frac{2}{3}a_0$. Die beiderseitige Deckung der Stösse ist also mit einer wesentlichen Ersparniss an Nieten und einem wesentlich kleineren Verlust an wirksamer Wandstärke verbunden.

Zur Bestimmung der angemessenen Werthe der Dimensionen a und d in einem gegebenen Querschnitt kann man folgenden Weg einschlagen. Aus Gleichung 11a) findet man mit dem Maximalwerth von R und indem man $\sigma' = k$ setzt, eine untere Grenze für a, welche man nach Schätzung und mit Rücksicht auf die erforderliche Steifigkeit der Blechwand um so mehr überschreitet, je kleiner jener gefundene Grenzwerth im Vergleich mit der Höhe der Wand und je weniger durch aufzunietende Winkeleisen anderweitig ihrer faltigen Verbiegung vorgebeugt ist. Mit dem sonach angenommenen Werth von a, ferner mit dem Maximalwerth von M und mit $\sigma' = k$ ergiebt sich dann aus 12a) eine untere Grenze für die Dicke d, welche es im Allgemeinen ausreichend sein wird bis zum nächstgrösseren Vielfachen der gegebenen Stärke der zu den Gurtungen zu verwendenden einzelnen Blechtafeln zu vergrössern. Zur Controle kann man jetzt zunächst nach 10) oder 10a) das Trägheitsmoment J, dann nach 11) mit dem Maximalwerth von R das grösste σ' für die Biegungsaxe und nach 12) mit dem Maximalwerth von M das grösste σ' für die grösste Entfernung von der Biegungsaxe berechnen und sich davon überzeugen, dass beide kleiner oder

nur unwesentlich grösser als k sind. Liegt der betreffende Querschnitt einem der beiden Auflager sehr nahe, so ist jedenfalls σ' nach 11), liegt er nahe der Mitte, so ist jedenfalls σ' nach 12) am grössten und deshalb einzig zu berechnen nöthig. Wenn man aber von dem Auflager zur Trägermitte allmählig fortschreitet, so gehen die Querschnitte, für welche σ' nach 11) resp. nach 12) am grössten ist, im Allgemeinen nicht unmittelbar in einander über, vielmehr sind zunächst solche Querschnitte zu erwarten, für welche nach 13) oder 14) mit dem Maximalwerth von R und entsprechendem M, dann solche, für welche nach 13) oder 14) mit dem Maximalwerth von M und entsprechendem R das Maximum von σ' sich ergiebt und demgemäss zur Controle der genügenden Bestimmung von a und d berechnet werden muss.

Bevor übrigens die Rechnung nach Gleichung 13) geschehen kann, muss das darin vorkommende $a = \frac{\varepsilon_1 - \delta_1}{\varepsilon_1} a_0$ bestimmt sein. Man findet aber $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und $\varepsilon_1 = \frac{1}{n_1}$ aus 15) und 16) mit dem Maximalwerth von R und mit $s = s_1 = k$, wobei jedoch zu bemerken, dass die Rücksicht auf eine leichter auszuführende durchlaufend gleiche Grösse von ε und ε_1 sowie auf den allseitig dichten Anschluss der Winkeleisen an die Gurtungen einer- und die Wand anderseits zu einer wesentlichen Verkleinerung der berechneten Abstände ε und ε_1 zu Gunsten der den Nieten aufzubürdenden Anstrengung Veranlassung geben kann. —

Die Gleichung 1) ergiebt sich aus §. 23, Gleichung 1). Danach ist nämlich, wenn von den 3 rechtwinkeligen Axen der x, y, z die erste senkrecht zum Querschnitt, die beiden letzten also im Querschnitt angenommen, und wenn die Tangentialspannung $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, sowie die Normalspannungen σ_y und $\sigma_z = 0$ vorausgesetzt werden, der grösste Absolutwerth λ' der specifischen Ausdehnung in einem Punkte, für welchen

λ_x die specifische Ausdehnung in der Richtung x, absolut genommen,

γ_y und γ_z die specifischen Verschiebungen des Querschnitts in den Richtungen y und z sind:

$$\lambda' = \frac{3}{8}\lambda_x + \frac{5}{8}\sqrt{\lambda_x^2 + \frac{16}{25}(\gamma_y^2 + \gamma_z^2)}.$$

Die Verschiebung des Querschnitts ist in jedem Punkte vertical; wird also die z-Axe vertical genommen, so hat man $\gamma_y = 0$, und wenn noch λ statt λ_x und γ statt γ_z gesetzt wird:

$$\lambda' = \frac{3}{8}\lambda + \frac{5}{8}\sqrt{\lambda^2 + 4\left(\frac{2}{5}\gamma\right)^2}$$

oder durch Multiplication mit E und mit Rücksicht auf $E = \frac{5}{2} G$ (*cf.* §. 17, Gleichung 1):

$$E\lambda' = \sigma' = \frac{3}{8}E\lambda + \frac{5}{8}\sqrt{(E\lambda)^2 + 4(G\gamma)^2} = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. —$$

Das durch Gleichung 3) ausgedrückte Aenderungsgesetz der Tangentialspannung in einem Querschnitt ergiebt sich durch folgende Betrachtung:

Es seien (*Fig. 64*) mm' und nn' zwei Querschnitte in der Entfernung dx von einander, op ein Horizontalschnitt in der Entfernung z von der Biegungsaxe OY. In allen Punkten der horizontalen Geraden, welche sich im Punkte o projicirt, findet dieselbe Tangentialspannung τ im Horizontalschnitt in der Richtung x wie im Querschnitt in der Richtung z statt ($\tau_{zx} = \tau_{xz}$), und es ist also die ganze Tangentialspannung in dem Flächenstreifen $op = \tau y\, dx$, welche mit Rücksicht auf das Gleichgewicht des von den Ebenen mo, np und op begrenzten Körperelementes der Differenz der Normalspannungen in mo und np, d. h. dem nach x genommenen Differential der Normalspannung in mo gleich sein muss. Sonach hat man:

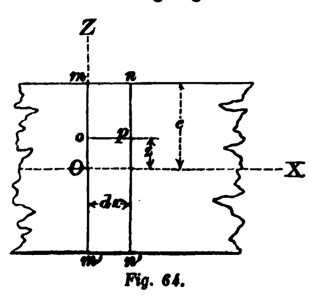


Fig. 64.

$$\tau y\, dx = \frac{d}{dx}\left(\int_z^e \sigma \cdot dq\right) dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_z^e z \cdot dq\right) dx$$

d. i. Gleichung 3), aus welcher für einen constanten Querschnitt Gleichung 4) mit Rücksicht auf §. 32, Gleichung 2) hervorgeht.

Als Controle für die Richtigkeit von Gleichung 3) muss sich die Summe der Tangentialspannungen in allen Flächenstreifen des Querschnitts zusammengenommen, d. h.

$$\int_0^e \tau y\, dz + \int_0^{e'} \tau y\, dz = R,$$

ergeben, wenn e und e' die grössten Werthe von z auf den entgegengesetzten Seiten der Biegungsaxe sind. In der That ist

$$\int_0^e \tau y\, dz = \int_0^e \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_z^e z\, dq\right) dz = \frac{d}{dx}\left[\frac{M}{J}\int_0^e dz \int_z^e z\, dq\right]$$

oder wegen

$$\int dz \int_z^e z\, dq = z\int_z^e z\, dq + \int z^2 dq$$

$$\int_0^e dz \int_z^e z\, dq = e\int_e^e z\, dq - 0\int_0^e z\, dq + \int_0^e z^2\, dq = \int_0^e z^2\, dq$$

$$\int_0^e \tau y\, dz = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_0^e z^2\, dq\right)$$

und ebenso:

$$\int_0^{e'} \tau y\, dz = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_0^{e'} z^2\, dq\right)$$

folglich:

$$\int_0^e \tau y\, dz + \int_0^{e'} \tau y\, dz = \frac{d}{dx}\left[\frac{M}{J}\left(\int_0^e z^2\, dq + \int_0^{e'} z^2\, dq\right)\right] = \frac{dM}{dx} = R. -$$

Zur Veranschaulichung des Abnahmegesetzes von τy bei wachsendem z kann man alle Breiten y des Querschnitts im Verhältniss $z : e$ reduciren, wodurch der Querschnitt q auf eine aus zwei Theilen bestehende Fläche reducirt wird, welche durch eine in der Biegungsaxe liegende gemeinschaftliche Spitze in einander übergehen. In *Fig. 65* ist die Gestalt dieser Fläche beispielsweise für die Fälle ange-

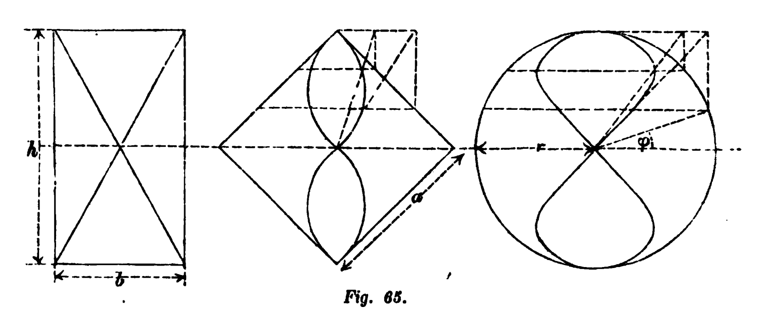


Fig. 65.

deutet, dass der Querschnitt q ein Rechteck mit horizontalen und verticalen Seiten, ein übereck liegendes Quadrat oder ein Kreis ist. Bezeichnet man das Stück dieser Fläche, welches von der mit der Biegungsaxe im Abstande z parallelen Geraden nach Aussen hin abgeschnitten wird, mit f_z^e, so ist

$$f_z^e = \int_z^e \frac{z}{e} y \cdot dz = \frac{1}{e} \int_z^e z\,dq,$$

folglich

$$\tau y = \frac{d}{dx}\left(\frac{Me}{J} \cdot f_z^e\right) \quad \ldots \ldots \quad \text{a)}$$

und insbesondere, wenn der Querschnitt constant ist oder seine Dimensionen nur wenig im Vergleich mit x veränderlich sind:

$$\tau y = \frac{Re}{J} \cdot f_z^e \quad \ldots \ldots \quad \text{b)},$$

d. h. τy proportional f_z^e. —

Dass für $z = e$ die specifische Tangentialspannung auch dann $= 0$ ist, wenn mit $z = e$ zugleich $y = 0$ wird, folgt aus Gleichung b) durch die Erwägung, dass in diesem Falle f_z^e eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, wenn $e - z$ und y unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind; in der That wäre auch eine Tangentialspannung im höchsten oder tiefsten Punkt des Querschnitts nur dadurch möglich, dass längs der Ober- oder Unterkante des Trägers eine äussere Kraft wirkte. —

Nach Gleichung 4) hat man für den rechteckigen Querschnitt *Fig. 65*:

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{R}{\frac{1}{12} b h^3} \int_z^{\frac{h}{2}} z \cdot b\,dz = \frac{R}{q} \frac{12}{h^2}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\frac{R}{q}.$$

Für den Kreis ergiebt sich mit $z = r \sin \varphi$, also $y = 2r \cos \varphi$, $dz = r \cos \varphi \cdot d\varphi$:

$$\tau = \frac{1}{2r\cos\varphi}\cdot\frac{R}{\frac{1}{4}\pi r^4}\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi\cdot 2r\cos\varphi\cdot r\cos\varphi\cdot d\varphi$$

$$= \frac{R}{q}\,\frac{4}{\cos\varphi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\cos^2\varphi\cdot d\cos\varphi = \frac{4}{3}\cos^2\varphi\cdot\frac{R}{q}.$$

Für das übereck liegende Quadrat ist wegen $y = 2(e-z)$:

$$\tau = \frac{1}{2(e-z)}\cdot\frac{R}{\frac{1}{12}a^4}\int_z^e z\cdot 2(e-z)\,dz = \frac{R}{q}\,\frac{12}{a^2(e-z)}\left(e\frac{e^2-z^2}{2}-\frac{e^3-z^3}{3}\right)$$

$$= \frac{R}{q}\,\frac{12}{a^2}\left(\frac{e^2+ez}{2}-\frac{e^2+ez+z^2}{3}\right) = \frac{R}{q}\,\frac{2}{a^2}(e^2+ez-2z^2)$$

oder wegen $e = \frac{a}{\sqrt{2}}$:

$$\tau = \left(1+\sqrt{2}\,\frac{z}{a}-4\frac{z^2}{a^2}\right)\frac{R}{q}$$

am grössten für:

$$\sqrt{2}-8\frac{z}{a} = 0 \quad \text{oder} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{8}a. -$$

Was die für den Blechträger insbesondere oben angeführten Näherungsformeln betrifft, so beruhen sie zunächst darauf, dass man das auf die Biegungsaxe bezogene statische und das Trägheitsmoment des Querschnitts bd einer Gurtung nur wenig zu klein, des Querschnitts $a_1 b_1$ eines Paars Winkeleisen nur wenig zu gross setzt, dass man also einen kleinen und dazu sich theilweise ausgleichenden Fehler begeht, wenn man für beide Querschnitte z constant $= f$ setzt. Danach ist für einen im Allgemeinen in Beziehung auf die Biegungsaxe unsymmetrischen Trägerquerschnitt die Lage dieser Axe bestimmt durch die Gleichung:

$$\left(bd+a_1b_1+\frac{af}{2}\right)f = \left(b'd'+a_1b_1+\frac{af'}{2}\right)f' \quad \ldots\ldots \quad c)$$

oder

$$\frac{bdf-b'd'f'}{f-f'}+a_1b_1+\frac{a}{2}(f+f') = 0$$

oder wenn

$$f+f' = h; \quad f-f' = nh,$$

also

$$f = \frac{1+n}{2}h; \quad f' = \frac{1-n}{2}h$$

gesetzt wird:

$$bd\frac{1+n}{2n}-b'd'\frac{1-n}{2n}+a_1b_1+\frac{ah}{2} = 0$$

$$\frac{bd-b'd'}{n}+bd+b'd'+2a_1b_1+ah = \frac{bd-b'd'}{n}+q = 0.$$

Wegen der Kleinheit von a und der stets nur geringen Verschiedenheit von f und f' kann man auch aus Gleichung c) näherungsweise folgern:

$$\left(bd + a_1 b_1 + \frac{af}{3}\right) f = \left(b'd' + a_1 b_1 + \frac{af'}{3}\right) f'$$

und mit Hülfe dieser Gleichung ergiebt sich der Ausdruck 10a) des Trägheitsmoments J aus Gleichung 10).

Mit denselben Vernachlässigungen, auf welchen die Gleichungen 9) und 10) beruhen, ist weiter für

$$z = 0: \quad y = a; \quad \int_z^e z\,dq = \left(bd + a_1 b_1 + \frac{af}{2}\right) f \quad . \quad . \quad . \quad \text{d)}$$

$$z = f_1: \quad y = a; \quad \int_z^e z\,dq = (bd + a_1 b_1) f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{e)}$$

$$z = f - \frac{a_1}{2}: \quad y = a_1; \quad \int_z^e z\,dq = bd \cdot f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{f)},$$

von welchen Ausdrücken der letzte freilich wegen gleichzeitiger Vernachlässigung der horizontalen Schenkel der Winkeleisen schon merklich zu klein sein kann; doch wird der Fehler, was σ' betrifft, dadurch zum Theil ausgeglichen, dass diese letzten zusammengehörigen Werthe von y und $\int_z^e z\,dq$ zusammen mit $z = f$ statt mit $z = f - \frac{a_1}{2}$ in Gleichung 8) substituirt werden. So findet man 14) aus 8); desgleichen 13) durch Substitution der zusammengehörigen Werthe sub e). Die Ausdrücke 11) und 12) können aus Gleichung 8) oder auch unmittelbar aus 4) und 2) entnommen werden.

Die Gleichungen 15) bis 17) finden in Gleichung 4) und d) bis f) ihre Erklärung. —

Die Gleichungen 18) und 18a) entsprechen der Forderung, dass in der Biegungsaxe $\sigma' = s_0$ sein soll. Es wird aber dieses σ' durch Gleichung 11) und bei beiderseitiger Deckung der Wandstösse s_0 durch Gleichung 17) gegeben; aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke folgt:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2 n_0 q_0'}$$

und wegen

$$n_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}; \quad q_0' = \frac{\pi \delta_0^2}{4}; \quad a = a_0 \frac{\varepsilon_0 - \delta_0}{\varepsilon_0}:$$

$$\frac{5}{4} \frac{1}{a_0\left(1 - \frac{\delta_0}{\varepsilon_0}\right)} = \frac{\varepsilon_0}{2 \frac{\pi}{4} \delta_0^2}; \qquad \frac{\delta_0}{a_0} = \frac{16}{10\pi}\left(\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} - 1\right)$$

oder sehr nahe:

$$\frac{\delta_0}{a_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} - 1\right); \qquad \frac{\varepsilon_0}{\delta_0} = \frac{a_0 + 2\delta_0}{a_0}$$

und

$$\frac{a}{a_0} = 1 - \frac{a_0}{a_0 + 2\delta_0} = \frac{2\delta_0}{a_0 + 2\delta_0}.$$

Bei nur einseitiger Deckung der Wandstösse ist dagegen s_0 doppelt so gross; die Forderung der Gleichheit von σ' und s_0 in der Biegungsaxe giebt also:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{n_0 q'_0};$$

daraus

$$\frac{\delta_0}{a_0} = \frac{16}{5\pi}\left(\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} - 1\right) = \frac{\varepsilon_0}{\delta_0} - 1$$

nahezu

$$\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} = \frac{a_0 + \delta_0}{a_0}; \quad \frac{a}{a_0} = 1 - \frac{a_0}{a_0 + \delta_0} = \frac{\delta_0}{a_0 + \delta_0}. \text{ —}$$

Beispiel. Die beiden als Blechwandträger construirten Hauptträger einer zweigleisigen Eisenbahnbrücke mögen mit einer freien Länge $l = 30^{\text{m}}$ aufliegen; pro 1^{m} Länge eines Hauptträgers wird seine permanente Belastung $p' = 1500^{\text{k}}$, seine zufällige Belastung $p'' = 3000^{\text{k}}$ angenommen, die constante Höhe der Blechwand: $h = 3^{\text{m}}$. Die Gurtungen sollen aus Blechtafeln von 1^{cm} Dicke gebildet, die Winkeleisen durchweg $1{,}2^{\text{cm}}$ dick genommen werden. Die Niete zur Verbindung der Winkeleisen mit den Gurtungen seien

$$\delta = 2{,}4^{\text{cm}}$$

stark, also

$$q' = \frac{\pi\delta^2}{4} = 4{,}52;$$

die Niete zur Verbindung der Winkeleisen mit der Blechwand dagegen:

$$\delta_1 = 2^{\text{cm}},$$

folglich

$$q'_1 = \frac{\pi\delta_1^2}{4} = 3{,}14.$$

Die untere Gurtung sei in Wirklichkeit 30^{cm} breit; dann ist bei gehöriger Versetzung der beiden sie durchdringenden Nietreihen ihre in Rechnung zu stellende Breite:

$$b = 30 - \frac{3}{2}\delta = 26{,}4^{\text{cm}},$$

und wenn die rechnungsmässige Breite der oberen Gurtung (entsprechend einer gleich grossen grössten Ausdehnung und Compression auf den entgegengesetzten Seiten der Biegungsaxe) ebenso gross sein soll, so ist sie in Wirklichkeit

$$26{,}4 + \frac{3}{4}\delta = 28{,}2^{\text{cm}}$$

breit zu machen; die Biegungsaxe liegt dann in der Mitte der Höhe h oder in der Entfernung $f = 150^{\text{cm}}$ von den Innenflächen beider Gurtungen.

Wenn die Summe der Schenkellängen jedes Winkeleisens in Wirklichkeit $20{,}2^{\text{cm}}$ beträgt, so ist dafür besten Falles nur

$$b_1 = 20{,}2 - \frac{1}{2}\delta - \delta_1 = 17^{\text{cm}}$$

zu rechnen, woraus mit $a_1 = 2{,}4^{\text{cm}}$ der Querschnitt eines zusammengehörigen Paares von Winkeleisen: $a_1 b_1 = 40{,}8$ Quadratcentimeter sich ergiebt. Bei 5^{cm} Entfernung der Nietloch-Mitten in den verticalen Schenkeln von den Aussenflächen der horizontalen Schenkel ist $f_1 = f - 5 = 145^{\text{cm}}$.

Mit $\frac{p'}{p''} = \frac{1}{2}$ ergiebt sich dann nach §. 32, 3):

$$m = 0{,}366 \cdot 30 = 10{,}98^{\text{m}}$$

und entfernt sich folglich der mittlere Querschnitt um 4^{m} nach beiden Seiten von der Trägermitte.

Nach diesen vorläufigen Festsetzungen, zu welchen noch die Voraussetzung hinzugefügt wird, dass die Stossfugen der Blechwand von beiden Seiten gedeckt und die betreffenden Niete mit dem Durchmesser $\delta_0 = 2a_0$ in der Entfernung $\varepsilon_0 = 5\delta_0 = 10\,a_0$ von Mitte zu Mitte angeordnet werden, so dass die rechnungsmässige Wandstärke $a = 0{,}8\,a_0$ ist, bleibt nur die erforderliche Stärke a_0 der Wandbleche und die Zahl der Blechtafeln zu berechnen, die in den Gurtungen auf einander liegen müssen, wenn das Maximum von σ' an keiner Stelle einen als höchstens zulässig gegebenen Werth, etwa 650^{k} pro Quadratcentimeter übersteigen soll. Es möge diese Rechnung für die Querschnitte am Auflager und in der Trägermitte sowie für die in $x = 4$ und 9 Meter Entfernung vom Auflager liegenden Querschnitte ausgeführt werden.

Zu dem Ende findet man nach §. 32, 4) und 5), wenn mit M' das grösste Spannungsmoment eines Querschnitts in Meterkilogrammen und mit R die entsprechende Schubkraft in Kilogrammen, mit R' die grösste vorkommende Schubkraft und mit M das entsprechende Spannungsmoment bezeichnet wird,

für	$x = 0$:	$M = M' = 0$;	$R' = 67500$
„	$x = 4^{\text{m}}$:	$M' = 234000$;	$R = 49500$
		$M = 213200$;	$R' = 50300$
„	$x = 9^{\text{m}}$:	$M' = 425250$;	$R = 27000$
		$M = 340200$;	$R' = 31050$
„	$x = 15^{\text{m}}$:	$M' = 506250$;	$R = 0$
		$M = 337500$;	$R' = 11250$.

Hiernach muss

1. am Ende des Trägers ($x = 0$) die rechnungsmässige Wandstärke a nach 11 a) jedenfalls

$$> \frac{5}{4}\,\frac{67500}{300 \cdot 650} = 0{,}43^{\text{cm}}$$

mithin $a_0 > \frac{5}{4}\,0{,}43 = 0{,}54^{\text{cm}}$ sein; zur Sicherung der nöthigen Steifigkeit werde jedoch $a_0 = 1^{\text{cm}}$, folglich $a = 0{,}8^{\text{cm}}$ genommen. Da ferner trotz $M' = 0$ aus constructiven Rücksichten die Gurtung doch wenigstens aus einer Blechlage bestehen muss, so sei $d = 1^{\text{cm}}$; dann ist für das Centimeter als Einheit nach 10) oder 10 a): $J = 4824000$ und das Maximum von σ', welches in der Biegungsaxe stattfindet, nach 11):

$$\sigma' = 417.$$

Ferner ist nach 15) und 16):

$$sn = 12{,}3; \quad s_1 n_1 = 22{,}5.$$

2. Dass in $x = 4^{\mathrm{m}}$ Abstand vom Auflager eine Wandstärke $a_0 = 0{,}8^{\mathrm{cm}}$, folglich $a = 0{,}64^{\mathrm{cm}}$ ausreichend sein werde, ist nach der Rechnung sub 1) mit Rücksicht auf die Verminderung von R' im Verhältniss 675 : 503 = 1 : 0,74 ohne Weiteres einleuchtend. Indem sich dann weiter aus 12a) ergiebt, dass entsprechend dem Maximalwerth M' des Spannungsmoments

$$d > \frac{1}{26{,}4}\left(\frac{234000}{650 \cdot 3} - 40{,}8 - 0{,}64 \cdot 50\right) = 1{,}8$$

sein muss, so kann als wahrscheinlich ausreichend hier eine zweifache Blechlage in der Gurtung, also $d = 2^{\mathrm{cm}}$ angenommen werden. Damit und mit $a = 0{,}64$ findet man $J = 5652000$, und dann

nach 11) für $z = 0$ mit dem Maximalwerth $R' : \sigma' = 369$;
„ 12) „ $z = e$ „ „ „ $M' : \sigma' = 629$;

weiter mit R' nach 15) und 16):

$$sn = 15{,}7; \quad s_1 n_1 = 19{,}9.$$

Behufs richtiger Vertheilung der Bohrlöcher ist es angemessen, denjenigen Nieten, welche die Winkeleisen mit der Gurtung verbinden, dieselbe Entfernung von einander zu geben wie denjenigen, welche die Verbindung mit der Blechwand herstellen, also $\varepsilon = \varepsilon_1$ und ausserdem diese Entfernung für den ganzen Träger, wenigstens für eine grössere Strecke desselben constant zu machen. Vom Auflager bis zu 4^{m} Abstand davon wäre dann für die höchstens zulässige Grösse dieser Entfernung entsprechend der Forderung s und $s_1 < 650$ der grösste der obigen 4 Werthe von sn und $s_1 n_1$ maassgebend, wenn nicht die Rücksicht auf gehörig dichten Schluss der Fugen eine noch kleinere Entfernung erforderte. Wird aus letzterem Grunde $\varepsilon = \varepsilon_1 = 16^{\mathrm{cm}}$, also $n = n_1 = \frac{1}{16}$ angenommen, so ergiebt sich mit dem Maximalwerth $s_1 n_1 = 22{,}5$:

$$s \text{ und } s_1 \lesseqgtr 22{,}5 \cdot 16 = 360,$$

mithin die Widerstandsfähigkeit dieser Niete mehr als ausreichend gross, so dass sie bei der Ausführung ohne Gefahr etwas schwächer als angenommen gemacht werden könnten.

Hiernach wird nun die Blechwand in der Reihe der Winkeleisen-Wand-Niete blos im Verhältniss $\frac{\varepsilon_1 - \delta_1}{\varepsilon_1} = \frac{7}{8}$ geschwächt, so dass die Berechnung von σ' an dieser Stelle der Wand mit $a = \frac{7}{8} \cdot 0{,}8 = 0{,}7$ geschehen kann, wofür sich nach 13) entsprechend M' und R:

$$\sigma' = 660$$

ergiebt, ein Werth, welcher von der Forderung $\sigma' \lesseqgtr 650$ nicht so viel abweicht, dass deshalb eine Vergrösserung der angenommenen Dimensionen nöthig wäre. Nach 14) findet man mit M' und R nur $\sigma' = 623$, während auch mit R' und M sich für beide Stellen noch kleinere Werthe von σ' ergeben.

3. Die Blechstärke $a_0 = 0,8^{cm}$ möge bis zur Mitte beibehalten werden. In $x = 9^m$ Entfernung vom Auflager muss dann nach 12 a)

$$d > \frac{1}{26,4}\left(\frac{425250}{650 \cdot 3} - 40,8 - 0,64 \cdot 50\right) = 5,5$$

sein. Einer 6 fachen Blechlage entsprechend werde demnach $d = 6^{cm}$ genommen, womit sich $J = 10404000$ und nach 12):

$$\sigma' = 638,$$

ferner nach 15) und 16):

$$sn = 16,0; \qquad s_1 n_1 = 14,2$$

ergiebt. Wenn aber die Entfernung $\varepsilon = \varepsilon_1 = 16^{cm}$ der betreffenden Niete auch hier beibehalten wird, so ergiebt sich mit M' und R entsprechend $a = 0,7$ nach 13):

$$\sigma' = 618.$$

Das Maximum von σ' findet also in der grössten Entfernung von der Biegungsaxe statt, und es wird dieses offenbar um so mehr bei denjenigen Querschnitten der Fall sein, welche der Trägermitte noch näher liegen.

4. Für den Querschnitt in der Trägermitte selbst hat man nach 12 a) mit $a = 0,64^{cm}$:

$$d > \frac{1}{26,4}\left(\frac{506250}{650 \cdot 3} - 40,8 - 0,64 \cdot 50\right) = 7,1$$

und ergiebt sich mit $d = 8^{cm}$:

$$J = 12780000$$

und nach 12):

$$\sigma' = 626.$$

Wenn man zu Abscissen, die sich wie 0 : 4 : 9 : 15 verhalten, Ordinaten im Verhältniss 1 : 2 : 6 : 8 aufträgt und deren Endpunkte durch eine stetige Curve verbindet, so lassen sich diejenigen Abscissen abgreifen, welche zu den Ordinaten 3, 4, 5, 7 gehören, womit also Stellen des Trägers bestimmt sind, an denen die Gurtungen aus einer 3, 4, 5, 7 fachen Blechlage bestehen müssen. Auf eine grössere Genauigkeit kommt es hierbei nicht an, weil man sich doch bei der Wahl der Anfangsstelle einer neuen Blechlage durch die gegebene Länge der einzelnen Blechtafeln und durch den Umstand mitbestimmen lässt, dass eine etwas weiter, als nach der Rechnung nöthig wäre, gegen das Auflager hin fortgesetzte Blechlage in ihrer Fortsetzung als Stossplatte für eine darunter liegende Stossfuge dienen kann.

In der Zeitschrift des Archit. u. Ingen. Vereins f. d. Königr. Hannover, Jahrg. 1860, pag. 175 und ff. findet sich eine gedrängte Zusammenstellung der grösseren bis dahin ausgeführten Blechbrücken (wie der schmiedeeisernen Brücken überhaupt) von Prof. Treuding in Hannover mit Rücksicht auf die verschiedenen Länder, Constructions-Systeme und deren historische Entwickelung, welcher die folgenden Notizen in der Hauptsache entnommen sind.

Das gewalzte Eisen ist zu Brückenträgern zuerst nach den Angaben von Rob. Stephenson verwendet worden, und zwar in der Form von Kastenträgern.

Auch die Röhrenbrücken verdanken dem kühnen Entwurf Stephenson's ihre Entstehung, und ist es bemerkenswerth, dass die erste ausgeführte Röhrenbrücke, die 1850 dem Verkehr übergebene Britannia-Brücke über die Menai-Meeresstrasse, zugleich die am weitesten gespannte Balkenbrücke überhaupt ist. Sie hat 2 Hauptöffnungen von je 460 Fuss und 2 Nebenöffnungen von je 230 Fuss engl. Weite; Project und Ausführung wurden von

Das System ergiebt sich unmittelbar aus der aufgeführten Ordnung. Die Unabhängigkeit der einzelnen Theile macht es möglich, dieselben bis auf die neueste Zeit fortzusetzen oder solche Theile, die sich rasch entwickeln, durch eine neue Bearbeitung zu ersetzen, ohne dadurch eine Störung für die übrigen Abtheilungen hervorzurufen, endlich auch neue Gebiete einzuschalten. Diese Unabhängigkeit der Bände von einander lässt ferner einen bei Sammelwerken fast immer hemmenden Umstand vermeiden, den nämlich, dass das Erscheinen eines in der systematischen Folge spätern Bandes nicht von der Vollendung der früheren abhängig ist.

So viel vom Plane des Ganzen. Was nun die in den einzelnen Bänden befolgte Methode der Bearbeitung anlangt, so wird diese nach der Natur der verschiedenartig zu behandelnden Gegenstände in manchen Stücken verschieden sein. Indessen sind einige Grundsätze als Norm festgestellt, welche die Encyklopädie von den bisherigen Sammelwerken unterscheiden werden und von denen einige hier erwähnt werden mögen.

Erstlich wird soviel als möglich eine Trennung der feststehenden Thatsachen und Theorien von dem mathematischen und experimentellen Beweise derselben durchgeführt. Hierzu ist eine besondere Einrichtung des Druckes angeordnet. Jeder Paragraph zerfällt nämlich in vier Haupttheile. In dem ersten, mit den grössten Lettern gedruckten, werden die feststehenden Thatsachen, die gültigen Gesetze, Theorien, Hypothesen referirt, aber im Allgemeinen ohne Anwendung des Kalküls. Der Zweck ist zunächst der, dass auch dem nicht mathematischen Publikum das Werk eine klare Uebersicht gewähre, wie sie sonst nur ein sogenanntes populäres Buch bieten kann; sodann aber ist es auch oft dem Physiker und Mathematiker willkommen, eine Darstellung der Resultate ohne die Rechnung vor sich zu haben.

Diesem ersten Theile schliessen sich, mit successive kleineren Lettern gedruckt, die Ausführungen der im ersten Theile des Paragraphen mitgetheilten Resultate an; sie bilden den eigentlichen Kern des Werkes für Alle, welche sich thätig mit irgend einer physikalischen Disciplin beschäftigen wollen, seien sie Physiker, oder Gelehrte anderer Fächer oder Techniker.

Es folgt nämlich zuerst die Theorie, wie sie am leichtesten und klarsten zum Ziele führt mit elementarem oder höherem Kalküle; darauf die Beobachtung, das Experiment und der Apparat; schliesslich Geschichte und Literatur.

Selbstverständlich kann diese Eintheilung des Stoffes nicht überall streng durchgeführt werden, vielmehr wird je nach der Natur des Gegenstandes bald der eine, bald der andere Theil hinwegfallen, indessen gilt die angeführte Bearbeitungsart als die Regel.

Zweitens wird auf die Beschreibung des Experimentes, besonders aber auf die des Apparates vorzügliche Sorgfalt verwendet werden. Deswegen werden die wichtigen Instrumente im Kupferstich und mit genauen Maassverhältnissen abgebildet, so dass sie als technische Vorlagen dienen können. Systematische Figuren dagegen oder Abbildungen, bei denen es auf die Dimensionen nicht genau ankommt, werden, im Holzschnitt ausgeführt, in den Text gedruckt. Letzteres soll zur Bequemlichkeit des Lesers dienen, ersteres dem gewiss von vielen Seiten gehegten Wunsche entgegenkommen, Mechanikern, die man zur Hand hat, die Ausführung solcher Apparate übertragen zu können, die sonst nur durch oft nicht ausführbares Verschreiben von fernen Orten zu beziehen sein würden.

Auf einen Theil der Physik, der bisher wenig berücksichtigt worden ist, wenn wir auch in deutschen Werken einzelne gute Vorarbeiten besitzen, wird drittens besonderes Gewicht gelegt werden, nämlich: auf die Geschichte und Literatur. Abgesehen von dem Interesse, welches die Kenntniss von der historischen Entwickelung der wissenschaftlichen Fortschritte an und für sich darbietet, ist es auch von offenbarem Nutzen, die früheren Arbeiten auf einem Gebiete überblicken zu können, um so mehr als durch die Zersplitterung der Literatur in unzähligen periodischen Schriften es immer schwieriger für den Gelehrten wird, sich vollständig zu orien-

tiren. Bei diesem verhältnissmässig neuen Theile des Werkes wird es an Lücken nicht fehlen, die indessen, wenn unsere Ansicht von der Bedeutung der Geschichte und Literatur der Physik die richtige ist, sich bald füllen werden.

Wie weit es den Bearbeitern der Encyklopädie gelingen wird, das von ihnen erstrebte Ziel zu erreichen, muss der Erfolg zeigen. Was durch Aufbietung äusserer Hülfsmittel erlangt werden kann, hat die Verlagshandlung bereitwilligst dargeboten, indem sowohl für eine schöne typographische Ausstattung als für sorgfältige Ausführung der Kupferstiche und Zeichnungen auf das beste gesorgt ist.

Kiel, März 1856.

G. Karsten.

Der unterzeichnete Verleger der „Allgemeinen Encyklopädie der Physik" wird derselben die Sorgfalt und Thätigkeit widmen, welche sie zu Ehren der Wissenschaft verdient und bedarf.

Die Form der Erscheinung wird eine doppelte sein; zunächst **in fortlaufenden Lieferungen** und später **in geschlossenen Bänden.**

In **Lieferungen** wird jede derselben ohngefähr 20 Druckbogen (in der Ausstattung des vorliegenden Prospects) oder Tafeln enthalten.

Der Inhalt einer solchen Lieferung wird häufig ein aus verschiedenen Bänden gemischter sein, um das im Drucke Vollendete zur baldigen Erscheinung zu bringen und den Wünschen der Abnehmer zu entsprechen, welche sich für sämmtliche Zweige der Physik interessiren. Die Zeit, in welcher die Lieferungen sich folgen, soll durch vorbereitete Mittel so beschleunigt werden, als die Unterstützung der Herren Bearbeiter es gestattet.

Der Subscriptionspreis beträgt für den Druckbogen oder die ihm entsprechende Tafel **4 Neugroschen.**

Bei der Abnahme in geschlossenen Bänden, sämmtlicher oder einzelner muss ich mir schon wegen der Verschiedenheit der typographischen Herstellungskosten, die Preisbestimmung noch vorbehalten; voraussichtlich wird sie eine höhere sein müssen.

Leipzig, März 1856.

Leopold Voss.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Fig. 2.

G

F

M

a

f f

c b b c

200 Fuſs engl. Fig. 5.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 6.

e

e

k

f

y x

y x

C

p

p

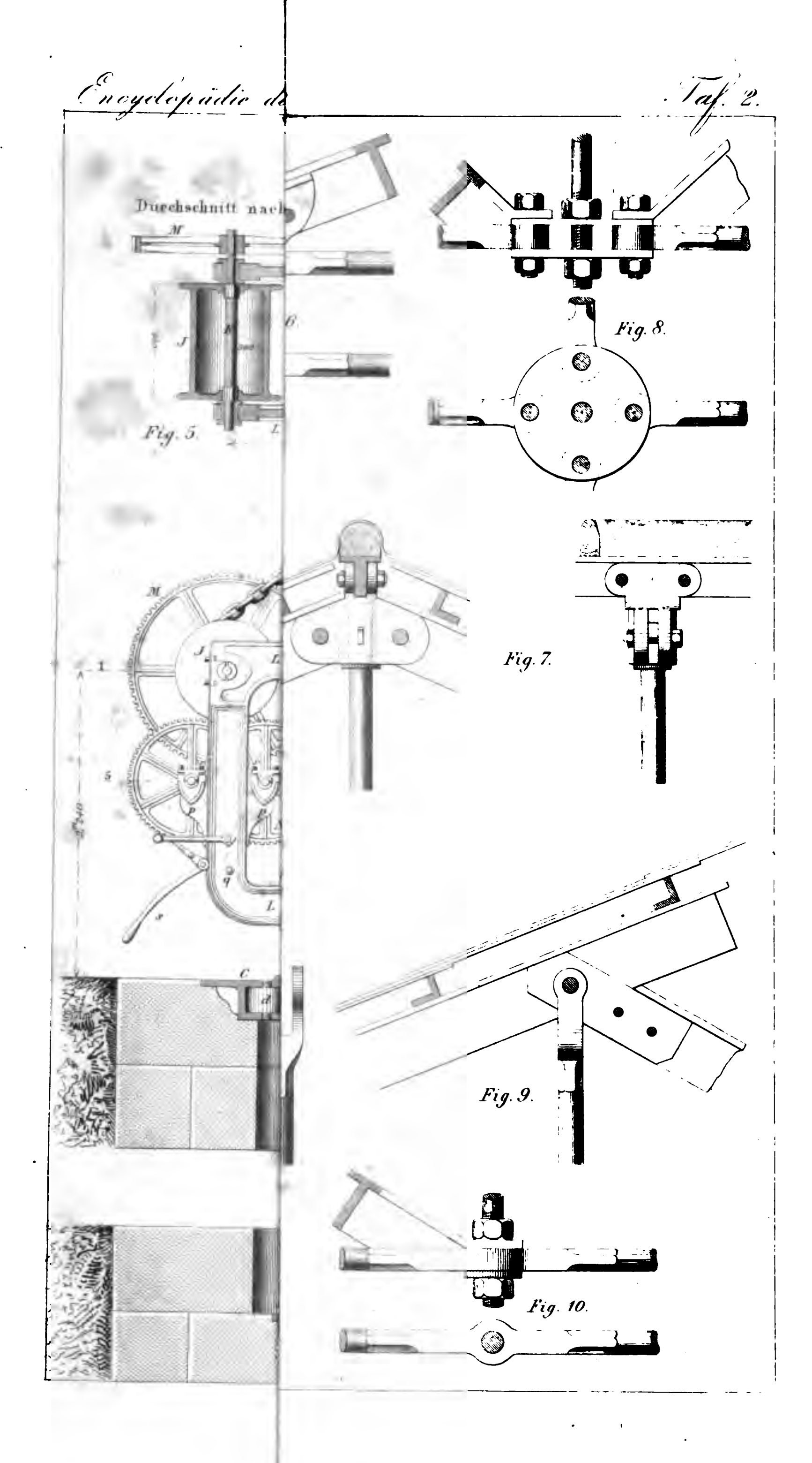
o

n

m

5 6 7 8 9 10 11 12 13 Fuſs engl. (Fig. 6.7.9.)

30 40 50 Fuſs engl. Fig. 8.


Durchschnitt nach
M
J
K
G
Fig. 5.
L
M
J
L
1
5
2540
p
q
L
s
C
d
Fig. 8.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 10.

